qibb

bildungs standards

Berufsbildende Schulen

Angewandte Mathematik BHS

Stand: Januar 2009

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur

Arbeitsgruppe:

Leitung: MR Dr. Peter SCHÜLLER
Prof. Mag. Lore EISLER (HAK Tulln)
Prof. Mag. Sissi HAMMERL (BAKIP Wien)
Dir. Dr. Markus HÖRHAGER (HTL Jenbach)
OStR. Prof. Mag. Jörg KLIEMANN (HLFS St. Florian)
Prof. Mag. Roland PICHLER (HTL Kapfenberg)
OStR. Prof. Mag. Wilfried ROHM (HTL Saalfelden)
Prof. Mag. Martin SCHODL (HAK Wien)
OStR. Prof. Mag. Brigitte WESSENBERG (HLW Amstetten)

Wissenschaftliche Beratung:

Dr. Helmut HEUGL, Univ. Prof. DI. Dr. Reinhard WINKLER

Abkürzungen:

BM:UKK….	Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur
BHS……..	Berufsbildende Höhere Schule
HTL………	Höhere technische Bundeslehranstalt
HAK……..	Handelsakademie
HUM…….	Humanberufliche Höhere Schule
HLW…….	Höhere Bundeslehranstalt für wirtschaftliche Berufe
HLFS……	Höhere Land- und Forstwirtschaftliche Schulen
BAKIP…..	Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik
BA……….	Bildungsanstalten

Inhalt

Vorwort der Steuerungsgruppe

Vielfalt und Qualität der Berufsbildung

Die Bildungssysteme in den Mitgliedstaaten der EU weisen vor allem im Bereich der Berufsbildung eine beachtliche Bandbreite auf, die auch ein Erfolgsfaktor für eine immer mehr von innovativen Produkten und Leistungen geprägten Wirtschaft ist. Die Vielfalt der Bildungswege fördert unterschiedliche Denk- und Handlungsansätze und schafft ein Potenzial an Qualifikationen, das zu originellen Problemlösungen befähigt. Dieses Potenzial kann am europäischen Bildungs- und Arbeitsmarkt aber nur wirksam werden, wenn die vielfältigen Qualifikationen transparent gemacht und ihrem Wert entsprechend anerkannt werden. Die Anerkennung und Verwertbarkeit erworbener Qualifikationen beruht zu einem wesentlichen Teil auf dem Vertrauen in die Qualität der einzelnen Bildungsanbieter. Das Bekenntnis zu einer nachhaltigen Sicherung und Weiterentwicklung der Qualität von Bildungsprozessen, die im Besonderen eine transparente Darstellung von Lernergebnissen einschließt, steht daher auch im Mittelpunkt der großen bildungspolitischen Themen der Gegenwart, wie der Schaffung eines *Nationalen* und *Europäischen Qualifikationsrahmens* (NQR bzw. EQR) sowie eines *Europäischen Leistungspunktesystems* (ECVET)[1].

Das Kompetenzmodell

Es gehört zur guten Praxis in der Entwicklung von Bildungsstandards, von einem überschaubaren Kompetenzbegriff auszugehen. Zu diesem Zweck wird der im Allgemeinen ziemlich komplexe Kompetenzbegriff über ein sogenanntes Kompetenzmodell auf Grunddimensionen zurückgeführt. Dazu zählen die Inhaltsdimension sowie die Handlungsdimension. Die Inhaltsdimension weist die für einen Unterrichtsgegenstand (Unterrichtsgegenstandsgruppe) oder ein Berufsfeld relevanten Themenbereiche aus. Mit der Handlungsdimension wird die im jeweiligen Unterrichtsgegenstand (Unterrichtsgegenstandsgruppe) oder im jeweiligen Berufsfeld zu erbringende Leistung zum Ausdruck gebracht. Ergänzend zur kognitiven Leistungsdimension finden auch personale und soziale Kompetenzen aus dem jeweiligen Berufsfeld Berücksichtigung. Man gelangt so zu einem Kompetenzverständnis, das dem im *Europäischen Qualifikationsrahmen* verwendeten Ansatz entspricht[2].

Die Anforderungen werden durch Deskriptoren zum Ausdruck gebracht, d.h. durch Umschreibungen der Anforderungen in Form von Ziel- oder Themenvorgaben. Zusätzliche Erläuterungen und Klarstellungen vermitteln die beigefügten prototypischen Unterrichtsbeispiele. Das Kompetenzmodell, die Deskriptoren und die prototypischen Unterrichtsbeispiele sind Instrumente, die für die Darstellung der Standards in der Berufsbildung verwendet werden.

Die Bildungsstandards für die Berufsbildung

Die Bildungsstandards der Berufsbildung fokussieren auf die Abschlussqualifikationen. Sie sind somit auch ein Bildungsnachweis für das Portfolio einer Absolventin/eines Absolventen an der Nahtstelle in das Berufsleben oder in eine weiterführende (tertiäre) Bildungseinrichtung. Dementsprechend konzentrieren sich die Bildungsstandards in der Berufsbildung auf:

- die berufsfeldbezogenen Kernkompetenzen sowie
- jene allgemeinbildenden Kernkompetenzen, die zum lebensbegleitenden Lernen und zur aktiven Teilnahme am gesellschaftlichen Leben befähigen.

Die Bildungsstandards für die berufsfeldbezogenen Kernkompetenzen beziehen sich auf die fachtheoretischen und -praktischen Unterrichtsgegenstände eines Bildungsganges, die in ihrer Gesamtheit auf die fachlichen Erfordernisse des Berufsfeldes abgestimmt sind, für das der Lehrplan ausbildet. Sie beinhalten selbstverständlich auch personale und soziale Kompetenzen. Entsprechend komplex sind die zu formulierenden Kompetenzmodelle.

Die allgemeinbildenden Kernkompetenzen, die zur Teilnahme am lebensbegleitenden Lernen und am gesellschaftlichen Leben befähigen, beziehen sich entweder auf einen einzelnen Unterrichtsgegenstand, wie „Deutsch“, „Englisch“, „Angewandte Mathematik“ und „Angewandte Informatik“ oder auf eine Gruppe von Unterrichtsgegenständen, wie die „Naturwissenschaften“, die Physik, Chemie und Biologie umfassen. Die entsprechenden Kompetenzmodelle bauen auf bereits bestehenden Entwicklungen auf, orientieren sich etwa am *Gemeinsamen Europäischen Referenzrahmen für Sprachen* des Europarates sowie an anerkannten Strukturen der entsprechenden Fachdidaktik.

---

[1] *Nationaler Qualifikationsrahmen* (NQR), *Europäischer Qualifikationsrahmen* (EQR), *Europäisches System zur Übertragung, Akkumulierung und Anerkennung von Lernleistungen im Bereich der Berufsbildung* (ECVET).

[2] Indikatoren des EQR: Kenntnisse, Fertigkeiten, Kompetenz (im Sinne von Übernahme von Verantwortung und Selbstständigkeit).

Funktionen der Bildungsstandards

Im Bereich der Berufsbildung haben die Lehrpläne den Charakter von Rahmenvorgaben. Diese Tatsache hat in Verbindung mit den schulautonomen Gestaltungsfreiräumen dazu geführt, dass die Umsetzung der Lehrpläne stark standortbezogen erfolgt. Die Formulierung von bundesweit gültigen Bildungsstandards soll dieser Entwicklung nicht entgegenwirken, aber Kernbereiche des Unterrichts in einer lernergebnisorientierten Darstellung normieren (Orientierungsfunktion für den Unterricht). So gesehen bringen die Bildungsstandards eine Konkretisierung der Lehrpläne in ausgewählten Kernbereichen und schaffen die Grundlage für die Implementierung eines kompetenzorientierten Unterrichts, der jedenfalls die Erreichung der zentralen, in den Bildungsstandards festgelegten Lernergebnisse sichern soll, und zwar unabhängig vom Schulstandort. Die schulautonomen Gestaltungsfreiräume der Schulen, die meist für standortabhängige Spezialisierungen genutzt werden, sind davon nicht betroffen.

Durch die Formulierung von gemeinsamen Zielvorstellungen und durch kompetenzbasierten Unterricht wird die Voraussetzung für eine österreichweite Evaluierung des berufsbildendenden Unterrichts geschaffen (Evaluierungsfunktion auf Systemebene). So kann durch Messung der Leistung von Schülerinnen und Schülern der Abschlussklassen im Rahmen von standardisierten Tests, die aus den Bildungsstandards zu entwickeln sind, oder durch entsprechend adaptierte abschließende Prüfungen im jeweiligen Schulbereich, Auskunft über die Erreichung der angestrebten Lernergebnisse gewonnen werden. In Verbindung mit der Befragung von Absolventinnen und Absolventen erhält man ein umfassendes Systemfeedback, das die erforderlichen Hinweise liefert, um steuernd auf das System einwirken zu können (wirkungsorientiertes Bildungsmanagement).
Die Bildungsstandards im Bereiche der Berufsbildung werden schließlich auch als Weiterentwicklung der Transparenzinstrumente aufgefasst, die in Form der Zeugniserläuterungen weitgehend umgesetzt wurden (Informationsfunktion). Der Einstieg in die Standardentwicklung trägt dem europaweit sichtbaren Bemühen Rechnung, Bildungsgänge lernergebnisorientiert darzustellen. In diesem Zusammenhang sind die Bildungsstandards auch ein Beitrag zur Umsetzung des *Europäischen Qualifikationsrahmens*, indem sie Bildungsabschlüsse über zu erreichende Lernergebnisse transparent und nachvollziehbar machen.

Entwicklungsplan

Man unterscheidet zwei aufeinanderfolgende Entwicklungsabschnitte:

I. die Entwicklung und Implementierung der Bildungsstandards als Grundlage für einen kompetenzorientierten Unterricht und
II. die Entwicklung und Implementierung von aus den Bildungsstandards abgeleiteten Methoden zur Überprüfung der Erreichung der Lernergebnisse auf Systemebene.

Alle Aktivitäten der „Initiative Bildungsstandards in der Berufsbildung“ finden derzeit in **Abschnitt I** statt. Für jeden einzelnen Bildungsstandard ist der Entwicklungs- und Implementierungsprozess in vier Phasen angelegt:

Phase I.1 betrifft die Erstellung des Kompetenzmodells und die Formulierung der zu erreichenden Ziele in Form von Deskriptoren und prototypischen (d.h. die Deskriptoren veranschaulichenden) Unterrichtsbeispielen.

In Phase I.2 wird eine größere Anzahl von Unterrichtsbeispielen ausgearbeitet. Unterrichtsbeispiele stellen in sich geschlossene Aufgaben dar, die in den Unterricht eingebaut werden können. Sie eignen sich zur Anregung im Unterricht, zur Orientierung, aber auch zur Selbstevaluation. Hier sollen sie zur Verbesserung der Unterrichtsqualität beitragen.

Phase I.3 dient der Pilotierung von Unterrichtsbeispielen an ausgewählten Pilotschulen. Unterrichtsbeispiele werden in den Unterricht einbezogen und die Erfahrungen an die Arbeitsgruppen zurückgemeldet.

In Phase I.4 geht es vornehmlich um die Konzeption pädagogischer Grundlagen für einen kompetenzorientierten Unterricht sowie um die Implementierung der erforderlichen Unterstützungsmaßnahmen.

Im **Abschnitt II** ist die Entwicklung einer Methodik zur Evaluierung von Lernergebnissen vorgesehen. Dies kann durch Einbindung der Bildungsstandards in die abschließenden Prüfungen erfolgen (teilstandardisierte Reife- und Diplomprüfung), allenfalls in Verbindung mit weiteren Möglichkeiten externer Evaluation auf Systemebene. Diese Phase bedarf einer sorgfältigen Vorbereitung und intensiven Auseinandersetzung mit allen Qualifikationsaspekten der berufsbildenden Schulen. Eine Reduzierung der Leistungsmessung auf das „leicht Messbare“ soll aber vermieden werden.

Die Entwicklung von Bildungsstandards für die berufliche Fachbildung beginnt vorerst mit einzelnen berufsbildenden höheren Schulformen. Es ist geplant, auch die berufsbildenden mittleren Schulen und die Berufsschulen in die Bildungsstandardentwicklung einzubeziehen. Wichtig ist, dass die Bildungsstandards nur auf die Abschlussqualifikation abzielen.
Die Ergebnisse der einzelnen Arbeitsgruppen zur Entwicklung der Bildungsstandards sind in Einzelbroschüren dokumentiert. Die Dokumentation enthält eine ausführliche Beschreibung der jeweiligen Bildungsstandards, die das Kompetenzmodell, die Deskriptoren und die prototypischen Unterrichtsbeispiele umfassen.

Die Steuerungsgruppe verbindet mit der Überreichung dieser Dokumentation die Einladung, sich am Prozess der Bildungsstandardentwicklung zu beteiligen.

I Einleitung

I.1 Angewandte Mathematik in der BHS – eine Bildungsorientierung

Begriffsfestlegungen

Für Begriffe wie „Bildungsstandard“ oder „Kompetenz“ existieren in der Literatur und in den unterschiedlichen Bildungssystemen zahlreiche überwiegend ähnliche, aber durchaus auch kontroversielle Definitionen und Interpretationen. Die Arbeitsgruppe erachtete es deshalb als unerlässlich, ihren Ausführungen jenes Verstehen der Begriffe voran zu stellen, dem sie in ihrer Arbeit gefolgt ist.

Der Bildungsstandard für Angewandte Mathematik formuliert fachliche und fachübergreifende Kernqualifikationen, die für die weitere Ausbildung oder für die Berufsausübung von Bedeutung sind. Er verbalisiert Kompetenzanforderungen in Bezug auf **mathematisches Handeln** und **mathematisches Fachwissen**, die im Laufe der Ausbildung in einer BHS erworben werden sollen. Durch den vorgegebenen Bildungsstandard wird sichergestellt, dass alle Schülerinnen und Schüler einer Schulform gemeinsame und vergleichbare Kernqualifikationen erwerben. Die Bildungsstandards für Berufsbildende Höhere Schulen in Österreich sind als **Regelstandards** definiert. Man erwartet, dass alle Absolventinnen und Absolventen einer BHS die formulierten Kompetenzanforderungen im Wesentlichen erfüllen.

Der Begriff **Kompetenz** steht für eine Vielfalt von Schlüsselqualifikationen und bezeichnet ganz allgemein die Fähigkeit eines Menschen, bestimmte Aufgaben und Problemstellungen selbständig situationsgerecht zu bewältigen.

Folgt man der einschlägigen Literatur, so zeichnet sich überwiegend eine Systematik von vier Grundkompetenzen ab, aus der sich alle weiteren Kompetenzen ableiten lassen. Als erste Grundkompetenz findet man die **Sachkompetenz,** die das Wissen der in den Lehrplänen festgeschriebenen **Lehrinhalte** voraussetzt. Diese wird hier als **mathematische Inhaltskompetenz** bezeichnet**.**

Als weitere Grundkompetenzen werden **die Methodenkompetenz***,* die **Sozialkompetenz** und die **Personalkompetenz** ausgeführt. Diese Kompetenzen bestimmen, bezogen auf das Fach Angewandte Mathematik, die Art des Umgangs mit den mathematischen Inhalten und umfassen aus Sicht der Arbeitsgruppe insbesondere die folgenden Fähigkeiten:

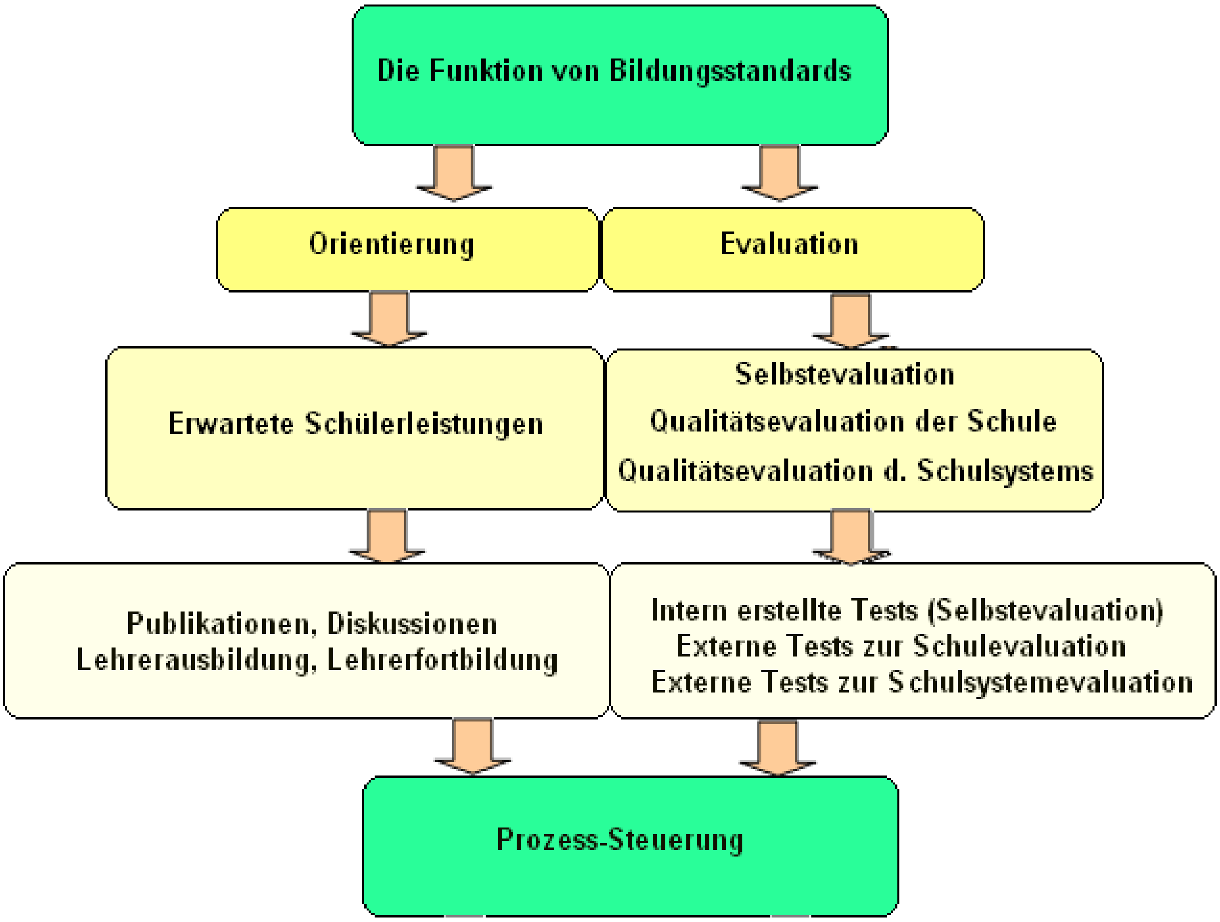
- ein vorliegendes Problem verbal zu verstehen, es in mathematische Sprache zu übersetzen und ein Modell zu erstellen,
- das Problem zu interpretieren, logische Schlüsse zu ziehen, Lösungsvorschläge von anderen Menschen zu bewerten und in Vergleich zum eigenen Weg zu stellen und das erzielte Ergebnis kritisch zu hinterfragen und zumindest überschlagsmäßig zu verifizieren,
- das für das Lösen eines Problems nötige Wissen sich selbst zu erwerben und technische Hilfsmittel und Formeln sinnvoll einsetzen,
- in einem Team kommunizieren und das Problem und den eigenen Lösungsvorschlag zu präsentieren sowie sich einer Diskussion zum bearbeiteten Problem mit mathematischer Argumentation zu stellen, also die eigenen Gedanken zu erklären, den eigenen Lösungsvorschlag zu beschreiben, Begründungen zu geben, die richtigen Fragen zu stellen, kreative Vermutungen einzubringen.

Die Arbeitsgruppe fasst all diese Fähigkeiten unter dem Begriff **mathematische Handlungskompetenz** zusammen.

Zur Funktion von Bildungsstandards in der Angewandten Mathematik

Bildungsstandards dienen einerseits **der Orientierung in der Lehr- und Lernwelt** wie andererseits als **Grundlage für Evaluierung**. Der Bogen der Evaluierung kann sich dabei vom kleinen Umfeld einer Klasse oder Schule (hier steht immer die Selbstevaluation im Mittelpunkt) bis zur Evaluation von ganzen Bildungssystemen spannen. Die nachstehende Graphik soll dies verdeutlichen.

Standards haben eine wichtige **direkte Rückwirkung auf** die **Schülerinnen und Schüler**, weil sie nicht die **Erwartung** des einzelnen Lehrers sondern jene **der Allgemeinheit** formulieren. Insofern können sie die Bereitschaft von Schülerinnen und Schülern stärken, sich nachhaltig mathematische Kompetenzen anzueignen.



Stellenwert des Technologieeinsatzes

Im realen Berufsleben, gleichgültig in welches Berufsfeld man blickt, ist Technologieeinsatz beim praktischen Arbeiten mit Zahlen sowie beim Lösen von Aufgaben und Problemen mit mathematischem Bezug heute selbstverständlicher Alltag. Dabei geht es kaum mehr um den einfachen Taschenrechner als vielmehr um absolut zeitgemäße und hochwertige Werkzeuge, die in einem breiten Spektrum auf jedem Arbeitsplatz, meist in Form eines PCs, zur Verfügung stehen. Laut Schulorganisationsgesetz ist die primäre Aufgabe von Berufsbildenden Höheren Schulen die Vermittlung von Bildung „…zur Ausübung eines gehobenen Berufes…“ [§ 65, SCHOG]. Somit ist der Einsatz von moderner Technologie im Unterrichtsgeschehen im Allgemeinen und natürlich im Unterrichtsfach „Angewandte Mathematik“ im Speziellen seit langer Zeit nicht mehr innovative Besonderheit sondern grundlegende Selbstverständlichkeit.

Um den Anforderungen der Berufspraxis gerecht zu werden steht dabei nicht das Werkzeug selbst im Mittelpunkt sondern die Vermittlung praxisorientierter „Technologiekompetenz“. Vordringliches Ziel ist es, bei den Schülerinnen und Schülern die Kompetenz zu entwickeln, problembezogen zu entscheiden, wann und in welchem Umfang der Einsatz von Technologie sinnvoll ist, und welche Technologie einzusetzen wäre. Die Schulung des reinen Handlings ist Grundlage und tritt in den Hintergrund.

Aus all diesen Aspekten begründet sich die breite und vielfältige Verankerung von Technologieeinsatz im „Bildungsstandard Angewandte Mathematik“ der Berufsbildenden Höheren Schulen.

Zur Dokumentation des „Standard Angewandte Mathematik“

Das Berufsbildende Höhere Schulwesen hat nahezu die gesamte Breite der Berufsfelder mit all ihren teils völlig konträren Zielsetzungen abzudecken, was sich in über sehr vielen unterschiedlichen Basislehrplänen niederschlägt. Die zum Teil völlig konträren Zielsetzungen lassen es nicht zu, einen für alle Ausbildungsformen gültigen einheitlich „Standard“ zu definieren. Die **Zielsetzungen und Inhalte** des Unterrichtsgegenstandes „Angewandte Mathematik“ weisen in den einzelnen Schularten **teils gravierende Unterschiede**, insbesondere **in ihren berufsspezifischen Ausprägungen** auf (siehe nachfolgender Abschnitt I.2 „Angewandte Mathematik in den einzelnen Sparten der BHS“).

Um dieser Differenziertheit gerecht werden zu können, wurde ein **Modell** entwickelt, das versucht, die unterschiedlichen Zielsetzungen zu berücksichtigen. In einem ersten Schritt wurde **der allen berufsbildenden Schulen gemeinsame Kern** herausgearbeitet. Darüber definieren sich in der Folge **schulartenspezifische Ausprägungen**, die sich einerseits in **speziellen Inhalten** als andererseits in einem **unterschiedlichen berufsfeldbezogenen Kontext** niederschlagen.

Der **Standard „Angewandte Mathematik“** definiert sich so **für** eine **bestimmte Schulart als „gemeinsamer Kern“ + „schulartenspezifische Ausprägung“** (siehe Abschnitt II.1, Kompetenzmodell).

Die **vorliegende Dokumentation** des Standards, in der alle Differenzierungen ausgeführt und erläutert werden, will nicht nur alle Betroffenen, sondern auch alle Verantwortungsträger in Bildungssystemen sowie grundsätzlich alle Personen, die an dem Thema Bildungsstandard interessiert sind, ansprechen.

Für die Arbeitsgruppe

MR. Dr. Peter Schüller

I.2 Angewandte Mathematik in den einzelnen Sparten der BHS

HTL:

Die **Höheren Technischen Bundeslehranstalten** gliedern sich in 17 verschiedene Fachrichtungen (z.B. Abteilung für Maschineningenieurwesen, Bautechnik, Elektrotechnik, ...) mit insgesamt mehr als 80 unterschiedlichen Schwerpunktssetzungen (z. B. Maschineningenieurwesen – Automatisierungstechnik, Maschineningenieurwesen – Maschinen- und Anlagentechnik, ...).

Diese Differenziertheit manifestiert sich in jeweils eigenen Lehrplänen. Auf Grund der teilweise stark unterschiedlichen Ausbildungsziele in den einzelnen Fachrichtungen ergeben sich lehrplanmäßige Unterschiede hinsichtlich der verfügbaren Unterrichtszeit für „Angewandte Mathematik", der Rahmen reicht dabei von 10 bis 15 Jahreswochenstunden. Dies macht in der Folge spezifische Ausprägungen und Erweiterungen nicht nur gegenüber den allgemeinen Grundanforderungen an das berufsbildende Schulwesen („schulartenspezifische Ausprägung"), sondern auch innerhalb der Schulart HTL selbst erforderlich. Diese drücken sich durch differenzierte inhaltliche Erweiterungen sowie einen praxisbezogenen Kontext aus, und sie werden in entsprechenden fachspezifischen Aufgabenstellungen zum Ausdruck gebracht.

In Schulformen mit technischen Schwerpunkt versteht sich „Angewandte Mathematik" als Schwerpunktfach, das neben seinen allgemeinen Bildungsaufgaben vor allem das Ziel hat, den Schülerinnen und Schülern jene mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten zu vermitteln, die sie befähigen, den Anforderungen insbesondere in den technischen Fachgegenständen gerecht zu werden. Als wesentliches übergreifendes Ziel der HTL-spezifischen „Angewandten Mathematik" soll deshalb die Fähigkeit vermittelt werden, Querverbindungen zur Fachtheorie und Berufspraxis der jeweiligen Fachrichtung herstellen zu können. Daraus ergibt sich aber letztendlich, dass in einzelnen Fachrichtungen der HTL auch ganz spezielle mathematische Methoden und Modelle zum Einsatzkommen, die sich in keiner anderen berufsbildenden Schule finden (z.B. Integraltransformationen).

HAK:

Als Ziel des Unterrichts in „Angewandter Mathematik" an **Handelsakademien** steht ein anwendungsorientierter Bezug zur Volkswirtschaft, Betriebswirtschaft und zum Rechnungswesen im Mittelpunkt. Es gilt, den Absolventinnen und Absolventen der Handelsakademien die erforderlichen mathematischen Kompetenzen für die Ausübung gehobener kaufmännischer Tätigkeiten in allen Zweigen der Wirtschaft und Verwaltung zu vermitteln. Ebenso werden aber auch die theoretischen Grundlagen zur Erreichung der allgemeinen Universitätsberechtigung gelegt.

An Handelsakademien gibt es unterschiedliche Fachrichtungen und Ausbildungsschwerpunkte. Der Umfang des Mathematikunterrichts bewegt sich je nach Schwerpunktsetzung der Ausbildungsform und eventueller schulautonomer Ausprägung in einem Rahmen zwischen 8 und 12 Jahreswochenstunden.

Die am häufigsten existierenden Schwerpunkte sind zur Zeit:

- Informationsmanagement und Informationstechnologie
- Internationale Wirtschaft mit Fremdsprache und Kultur
- Entrepreneurship und Management
- Logistikmanagement und Speditionswirtschaft
- Digital Business
- Controlling und Planungsmathematik
- Internationale Wirtschaft und Sportmanagement

Die schulspezifischen Ausprägungen der Handelsakademien unterscheiden sich in den mathematischen Inhalten nicht wesentlich von den Grundanforderungen, die allgemein für berufsbildende höhere Schulen gelten. Fast alle Aufgaben und Fragestellungen stehen jedoch in einem anwendungsbezogenen Kontext und charakterisieren sich auch durch den im Lehrplan verankerten verpflichtenden Einsatz von Technologie.

HUM / HLFS:

Die **humanberuflichen höheren Schulen** umfassen unterschiedliche Schulformen, die alle im Unterricht den Wirtschaftsaspekt als Schwerpunkt führen, daneben aber weitere schulformspezifische Zielvorstellungen verwirklichen. Die Höheren Schulen für wirtschaftliche Berufe und Tourismus betonen zusätzlich Themen zur Ernährung und Gastronomie, mit einigen Ausnahmen auch andere Schwerpunkte, wie etwa Umwelttechnik. Die Höheren Schulen für Mode und Kunst heben neben dem wirtschaftlichen Aspekt die künstlerische Gestaltung hervor, die Höheren Schulen für Soziales haben den zusätzlichen Schwerpunkt Persönlichkeitsbildung **und die Höheren Schulen für Land- und Forstwirtschaft** betonen das Zusammenwirken von Mensch, landwirtschaftlicher Produktion, Umwelt und Gesellschaft im ländlichen Raum.

Für die unterschiedlichen Schulformen liegen differenzierte Lehrpläne für das Fachgebiet „Angewandte Mathematik“ mit Jahreswochenstundenzahlen, die zwischen 8 und 12 variieren, vor.
Dem Gegenstand „Angewandte Mathematik“ liegen aber gemeinsame Schwerpunkte und Unterrichtsziele zu Grunde. Im Wesentlichen erfordern die schulspezifischen Ausprägungen der HUM kaum inhaltliche Erweiterungen gegenüber den Grundanforderungen in den anderen Berufsbildenden Höheren Schulen, die Aufgabenstellungen stehen aber in einem ganz besonderen anwendungsbezogenen Kontext.
Es geht in allen Schwerpunktssetzungen der HUM / HLFS um eine mathematische Ausbildung, die in erster Linie wirtschaftliche Anwendungen, aber ebenso Bezüge zur Umwelt, zu sozialen Themen sowie zu Ernährungs- und Gesundheitsfragen berücksichtigt.

BA:

In den Schulformen der **Bildungsanstalten für Kindergarten- und Sozialpädagogik** und andere BA unterscheiden sich die grundlegenden Ziele des Mathematikunterrichts von jenen in den anderen Berufsbildenden Höheren Schulen.

Die grundsätzlichen allgemeinen Bildungsziele der BAKIP und BASOP, wie sie im Lehrplan festgelegt sind, umfassen neben der Vermittlung einer fundierten Allgemeinbildung, bzw. Studierfähigkeit, insbesondere auch die Vermittlung jener Haltungen und Fähigkeiten, die für eine professionelle pädagogische Arbeit in Kindergärten, Horten, Heimen und Tagesstätten notwendig sind sowie eine ausgeprägte Persönlichkeitsbildung.

Dazu soll der Mathematikunterricht durch Vermittlung folgender spezieller Fähigkeiten und Fertigkeiten beitragen:

- Kritikfähigkeit,
- Problembewusstsein,
- Übersetzen einer Problemstellung aus der Umwelt in die mathematische Symbolsprache,
- Transfer innerhalb der Mathematik sowie auch Fächer übergreifend,
- exaktes, planmäßiges Arbeiten, konsequentes Vorgehen und präzises Darstellen von Sachverhalten und Ergebnissen,
- den Umgang mit technischen Hilfsmitteln.

.
So soll der konstruktive Umgang mit der grundsätzlichen Unabschließbarkeit von Wissen erworben werden, aber auch die Erkenntnis, dass Argumentieren ein Charakteristikum der Mathematik ist und das Lösen von Aufgaben Freude und Selbstvertrauen bringen kann.

Weiters soll die Einsicht vermittelt werden, dass in Hinblick auf den Beruf mathematisches Grundwissen und Denken im Sinne mathematischer Frühförderung bereits im Kleinkindalter bei Mädchen und Knaben gleichermaßen gefördert werden muss.

Auf Grund des speziellen Berufsbildes gehen die vermittelten mathematischen Kompetenzen nicht über den gemeinsamen Kern der Berufsbildenden Höheren Schulen hinaus. Der Gegenstand heißt auch „Mathematik“ im Gegensatz zur „Angewandten Mathematik“ in den anderen BHS.

II Bildungsstandard für Angewandte Mathematik

II.1 Das Kompetenzmodell

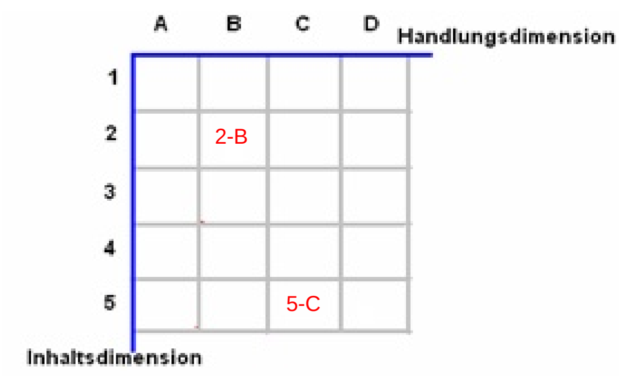
Kompetenzanforderungen im **gemeinsamen Kern** sind in allen Schultypen der BHS in gleicher Weise gültig. **Schulartenspezifische Ausprägungen** stellen, aufbauend auf den gemeinsamen Kern, erweiterte Grundkompetenzen inhaltlicher und kontextbezogener Natur in den einzelnen Sparten der BHS (HAK, HTL, HUM, BA) dar und sind für den jeweiligen Schultyp in Hinblick auf das berufliche und allgemeinbildende Ausbildungsziel unverzichtbar.

Mathematische .Kompetenzen beziehen sich auf mathematische Tätigkeiten und Inhalte.

Daher unterscheiden wir eine **Handlungsdimension** und eine **Inhaltsdimension**. Für jede Dimension sind unterschiedliche Ausprägungen vorstellbar. Im hier verwendeten Kompetenzmodell werden 4 Handlungsbereiche (A, B, C, D) und 5 Inhaltsbereiche (1,2,3,4,5) unterschieden.

Diese Bereiche sind nicht scharf voneinander trennbar, sie sind grundsätzlich miteinander vernetzt. Zur Analyse von Teilaspekten mathematischer Kompetenz ist die Unterteilung aber nötig und hilfreich.

Die einzelnen Felder (z.B. 1-A, 2-B, 3-D) symbolisieren die Verknüpfung von Handlungs- und Inhaltselementen und werden **Deskriptoren** genannt.



1…Zahlen und Maße
2…Algebra und Geometrie
3…Funktionale Zusammenhänge
4…Analysis
5…Stochastik

A…Modellieren und Transferieren
B…Operieren und Technologieeinsatz
C…Interpretieren und Dokumentieren
D…Argumentieren und Kommunizieren

II.2 Beschreibung der Inhaltsdimension

In den 5 Inhaltsbereichen werden einerseits konkrete Inhalte aufgelistet, die für alle BHS gelten und andererseits spezifische Inhalte, die nur für bestimmte, in Klammer angeführte Schulformen bedeutsam sind.

1 Zahlen und Maße

1.1 Zahlenmengen N, Z, Q, R, Zahlenstrahl
1.2 Komplexe Zahlen, Gauß'sche Ebene
1.3 Dezimal- und Gleitkommadarstellung
1.4 Maßeinheiten
1.5 Prozentrechnung
1.6 Boole'sche Algebra (HTL)

2 Algebra und Geometrie

2.1 Variable, Terme und Formeln
2.2 Gleichungen, Ungleichungen
2.3 Gleichungssysteme
2.4 Elementare Geometrie und Trigonometrie
2.5 Vektoren
2.6 Matrizen

3 Funktionale Zusammenhänge

3.1 Empirische sowie diskrete bzw. kontinuierliche mathematische Funktionen
3.2 Definitions- und Wertemenge
3.3 Darstellung von Funktionen in unterschiedlichen Formen, Skalierungen
3.4 Eigenschaften von Funktionen
3.5 Umkehrfunktionen
3.6 Zahlenfolgen und Reihen
3.7 Ausgleichsfunktionen (HUM/HLFS, HAK, HTL)
3.8 Interpolation (HTL)
3.9 Komplexe Funktionen (HTL)

4 Analysis

4.1 Grenzwertbegriff
4.2 Stetigkeit und Grenzverhalten
4.3 Differenzen- und Differentialquotient, Differenzierbarkeit und Ableitungsfunktion
4.4 Ableitungsregeln
4.5 Bestimmtes Integral und Stammfunktion
4.6 Integrationsregeln
4.7 Differenzengleichungen (HAK, HTL)
4.8 Reihenentwicklungen (HTL)
4.9 Fehlerrechnung (HTL)
4.10 Differentialgleichungen (HTL)
4.11 Integraltransformationen (HTL)

5 Stochastik

5.1 Beschreibende Statistik
5.2 Regression und Korrelation
5.3 Wahrscheinlichkeitsbegriff und –rechnung
5.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen
5.5 Beurteilende Statistik
5.6 Aktienanalyse (HAK)

II.4 Beschreibung der Handlungsdimension

Wir unterscheiden vier unterschiedliche mathematische Handlungsbereiche, nämlich Modellieren und Transferieren, Operieren und Technologieeinsatz, Interpretieren und Dokumentieren, Argumentieren und Kommunizieren. Im Folgenden werden die Begriffe definiert, und die zu den einzelnen Bereichen zugehörigen charakteristischen Tätigkeiten aufgelistet.

A Modellieren und Transferieren

Modellieren erfordert, dass man in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen erkennt und diese dann in mathematischer Form darstellt, allenfalls Annahmen trifft und Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vornimmt.

Transferieren erfordert ein adäquates Nutzen oder Übertragen fachlicher Kompetenzen in den Alltag sowie in berufsfeldspezifische Bereiche.

Charakteristische Tätigkeiten sind

- Aufgabenstellungen auf das Wesentliche zusammenfassen und präzisieren
- mathematische Darstellungen finden und für das Problem adaptieren
- ein geeignetes Modell für das gestellte Problem finden und erklären
- alltagsprachliche bzw. berufsspezifische Formulierungen in die Sprache der Mathematik übersetzen
- sich für eine bestimmte mathematische Vorgangsweise entscheiden und die Lösungsabläufe planen
- sich für verschiedene Darstellungsformen entscheiden und diese auch wechseln
- den Zusammenhang zwischen mathematischen Modellen und der Problemstellung aus Alltag und Wissenschaft herstellen
- das mathematische Wissen fächerübergreifend anwenden
- selbständig mathematische Konzepte ins berufliche Umfeld umsetzen

B Operieren und Technologieeinsatz

Operieren meint die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt geometrisches Konstruieren oder das Arbeiten mit Tabellen und Grafiken mit ein und beinhaltet immer auch die zweckmäßige Auslagerung operativer Tätigkeiten an die verfügbare Technologie.

Technologieeinsatz: Mathematisches Tun wird heute in vielen Bereichen durch die permanente Verfügbarkeit und Verwendung elektronischer Werkzeuge unterstützt oder überhaupt erst ermöglicht. Dies gilt für nahezu alle Ebenen mathematischen Arbeitens. Eine entsprechende „Werkzeugkompetenz“ ist daher integraler Bestandteil mathematischer Kompetenzen.

Charakteristische Tätigkeiten sind

- einfache Berechnungen im Kopf durchführen
- Ergebnisse in geeigneter Genauigkeit abschätzen, mit Näherungswerten rechnen und sinnvoll deuten
- geometrisches Grundlagenwissen sinnvoll einsetzen
- numerische, symbolische und graphische Methoden unterscheiden und situationsgerecht einsetzen.
- Software zur Problemlösung passend auswählen und nutzen
- „Händisches“ Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile klassifizieren und situationsgerecht einsetzen

C Interpretieren und Dokumentieren

Interpretieren erfordert, dass man aus Informationen oder aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte erkennt und darlegt, sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext deutet.

Dokumentieren meint, Modelle, Lösungswege und Ergebnisse für Adressaten brauchbar darzustellen und zu erläutern.

Charakteristische Tätigkeiten sind

- Ergebnisse beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten
- Lösungsvorschläge auf ihre Bedeutung hin beurteilen
- mathematische Abhängigkeiten beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten
- den Einfluss von Parametern untersuchen und deuten
- die Korrektheit mathematischer Darstellungen sowohl im inner- als auch im außermathematischen Kontext einschätzen bzw. Fehler erkennen
- Dokumentieren des Lösungsweges und der Lösung verbal bzw. durch mathematische Argumentation

D Argumentieren und Kommunizieren

Argumentieren begründet Entscheidungen oder erfordert die Angabe von Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise sprechen. Argumentieren benötigt die korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Regeln sowie die Kenntnis der mathematischen Fachsprache.

Kommunizieren meint, kontextbezogene Informationen in adressatengerechter Fachsprache auszutauschen.

Charakteristische Tätigkeiten sind

- mathematische Denkschritte auch im Team entwickeln, ausarbeiten und reflektieren
- Vermutungen formulieren und begründen
- die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren
- den Einsatz mathematischer Modelle und Rechenverfahren erläutern und begründen
- Fehler erkennen und mit mathematischer Argumentation begründen
- verschiedene Präsentationstechniken und -mittel nutzen

II.4 Die Standardmatrix

Die Verknüpfung einer Inhaltsdimension mit einer Handlungsdimension nennen wir **Deskriptor des Standards**. Die folgende Matrix enthält alle Hauptdeskriptoren des Bildungsstandards für angewandte Mathematik:

	Handlungsdimension				
	Die charakteristischen mathematischen Tätigkeiten sind	**A Modellieren und Transferieren**	**B Operieren und Technologieeinsatz**	**C Interpretieren und Dokumentieren**	**D Argumentieren und Kommunizieren**
Inhaltsdimension	**1 Zahlen und Maße**	... für eine Problemstellung mit Zahlen und Maßen ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.	.... mit Zahlen und Maßen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.	... Zahlen und Maße in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.	... mit Hilfe von Zahlen und Maßen argumentieren und kommunizieren.
	2 Algebra und Geometrie	... für eine Problemstellung mit Hilfe der Algebra und Geometrie ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen	... mit algebraischen und geometrischen Objekten operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.	... algebraische und geometrische Objekte in ihrem Kontext interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren	... in der Fachsprache der Algebra und Geometrie argumentieren und kommunizieren.
	3 Funktionale Zusammenhänge	... ein geeignetes Modell für einen funktionalen Zusammenhang finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.	... mit funktionalen Zusammenhängen operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.	... funktionale Zusammenhänge interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren.	... funktionale Zusammenhänge argumentieren und kommunizieren.
	4 Analysis	... für eine Problemstellung mit Hilfe der Analysis ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen	... Operationen in der Analysis durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.	... Zusammenhänge in der Analysis interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren	... in der Fachsprache der Analysis argumentieren und kommunizieren.
	5 Stochastik	... für eine Problemstellung mit Hilfe der Stochastik ein geeignetes Modell finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.	... Operationen in der Stochastik durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen.	... Zusammenhänge in der Stochastik interpretieren und meine Überlegungen dokumentieren	... in der Fachsprache der Stochastik argumentieren und kommunizieren

III Unterrichtsbeispiele

III. 1 Prototypische Beispiele für den gemeinsamen Kern

1-A Modellieren und Transferieren mit Zahlen und Maßen

Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Haare“ (Wilfried Rohm)

Für eine Problemstellung mit Zahlen und Maßen ein geeignetes Modell finden

Aufgabe:

Wie viel Haare hat der Mensch auf dem Kopf? (*Welche plausiblen Annahmen können getroffen werden, wie soll der Rechengang grundsätzlich aussehen?*)			
Technologieeinsatz	x nicht vorgesehen	frei gestellt	erforderlich

Möglicher Lösungsweg

Annahmen: mittlerer Haarabstand ≈ 1 mm, also $10 \cdot 10 \frac{Haare}{cm^2}$

kugelförmiger Kopf mit Durchmesser 20 cm, etwa die Hälfte wird als behaart angenommen.

Rechnung: Es wird die halbe Oberfläche der Kugel berechnet (in cm^2) und das Ergebnis mit $100 \frac{Haare}{cm^2}$ multipliziert.

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund: **1 Zahlen und Maße** 1.3 Dezimal- und Gleitkommadarstellung 1.4 Maßsysteme **A Modellieren und Transferieren** Charakteristische Tätigkeiten sind • Aufgabenstellungen auf das Wesentliche zusammenfassen und präzisieren • mathematische Darstellungen finden und für das Problem adaptieren • ein geeignetes Modell für das gestellte Problem finden und erklären • alltagsprachliche bzw. berufsspezifische Formulierungen in die Sprache der Mathematik übersetzen • sich für eine bestimmte mathematische Vorgangsweise entscheiden und die Lösungsabläufe planen • den Zusammenhang zwischen mathematischen Modellen und der Problemstellung aus Alltag und Wissenschaft herstellen • das mathematische Wissen fächerübergreifend anwenden • selbständig mathematische Konzepte ins berufliche Umfeld umsetzen.
Methodisch didaktische Anmerkungen: Wesentliches Merkmal der Modellbildung soll die Wahl einer vernünftigen Vorgangsweise sowie eine plausible Ausgangsschätzung sein. Wie diese Ausgangsschätzung erreicht wird, ist der Phantasie überlassen (vernünftige Annahme, Beobachtungen beim Nachbar mit dem Lineal, …), sie soll aber jedenfalls begründbar und nachvollziehbar sein!

2-B Operieren und Technologieeinsatz in Algebra und Geometrie

Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Städtedreieck“ (Brigitte Wessenberg)

Dreiecksfläche berechnen und sinnvoll technische Werkzeuge einsetzen

Aufgabe:

Die Karte zeigt ein Dreieck, in dem drei Hauptstädte von Österreich liegen:
Wien, Eisenstadt und St. Pölten.
Die Entfernungen sind in km angegeben.

Welchen Flächeninhalt hat dieses Gebiet?

Technologieeinsatz	nicht vorgesehen	x frei gestellt	erforderlich

Mögliche Lösungswege

- Die Heron’sche Flächenformel ist benützbar und ergibt eine rasche Lösung.

- Die Lösung auch mit Hilfe von Trigonometrie möglich.
  Es sind 3 Seiten eines allgemeinen Dreiecks gegeben, daher führt die Anwendung des Kosinussatzes zur Berechnung eines Winkels. a = P-W = 72 km, b= WE = 53 km , c = E-P = 81 km

zB $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ à α = Winkel bei Eisenstadt = 60,82°

Die Fläche berechnet sich dann mit Flächensatz:

$$A = \frac{bc\sin\alpha}{2} = 1874{,}11\ \text{km}^2$$

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

2 Algebra und Geometrie
2.1 Variable, Terme und Formeln
2.5 Elementare Geometrie und Trigonometrie

B Operieren und Technologieeinsatz
Charakteristische Tätigkeiten sind

- einfache Berechnungen im Kopf durchführen
- Ergebnisse in geeigneter Genauigkeit abschätzen, mit Näherungswerten rechnen und sinnvoll deuten.
- geometrisches Grundlagenwissen sinnvoll einsetzen.
- „Händisches“ Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile klassifizieren und situationsgerecht einsetzen.

Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Bewegung“ (Roland Pichler)

Den mathematischen Zusammenhang zwischen sprachlichen Vorgaben und Gleichungen erkennen und dokumentieren

Aufgabe:

Einer der folgenden vier Texte lässt sich durch die beiden linearen Gleichungen
$s = 80t$ und $s = 280 - 60t$ beschreiben. Stellen Sie fest, um welchen Text es sich handelt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. Lesen Sie den Text sorgfältig durch!

Es wird angenommen, dass sich zwei Fahrzeuge, ein PKW und ein LKW mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

a) Der PKW verlässt um 8 Uhr den Ort A in Richtung des 280 km entfernten Ortes B und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_P = 80$ km/h. Zum gleichen Zeitpunkt startet der LKW von A in Richtung B auf der gleichen Strecke, es wird eine Geschwindigkeit für den LKW von $v_L = 60$ km/h angenommen.

b) Der PKW verlässt um 8 Uhr den Ort A in Richtung des 280 km entfernten Ortes B und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_P = 80$ km/h. Zum gleichen Zeitpunkt startet der LKW von B in Richtung A auf der gleichen Strecke, es wird eine Geschwindigkeit für den LKW von $v_L = 60$ km/h angenommen.

c) Der PKW verlässt um 8 Uhr den Ort A in Richtung des 80 km entfernten Ortes B und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_P = 60$ km/h. Zum gleichen Zeitpunkt startet der LKW von B in Richtung A auf der gleichen Strecke, es wird eine Geschwindigkeit für den LKW von $v_L = 80$ km/h angenommen.

d) Der PKW verlässt um 8 Uhr den Ort A in Richtung des 280 km entfernten Ortes B und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_P = 80$ km/h. 60 Minuten später startet der LKW von B in Richtung A auf der gleichen Strecke, es wird eine Geschwindigkeit für den LKW von $v_L = 60$ km/h angenommen.

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	x frei gestellt	☐ erforderlich

Mögliche Lösungswege (exemplarisch)

- Es ist eine gleichförmige Bewegung angenommen, daher ist die lineare Funktion eine passende Beschreibung.
- Wege, den Text zu interpretieren:
  -Einfache Skizze über Entfernung und Bewegung
  -Durch Darstellung als Graphen im Koordinatensystem
  -Durch Auffassen als lineares Gleichungssystem
- Die beiden Gleichungen beschreiben die Vorgänge unter **b)**

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

2 Algebra und Geometrie
2.1 Variable, Terme und Formeln
2. 2 Gleichungen

C Interpretieren und Dokumentieren
Charakteristische Tätigkeiten sind
- mathematische Abhängigkeiten beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten
- den Einfluss von Parametern untersuchen und deuten
- die Korrektheit mathematischer Darstellungen sowohl im inner- als auch im außermathematischen Kontext einschätzen bzw. Fehler erkennen.
- Dokumentieren des Lösungsweges und der Lösung verbal bzw. durch mathematische Argumentation

Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Bakterienvermehrung“ (Sissi Hammerl)

Ein geeignetes Modell für einen funktionalen Zusammenhang finden und einen Transfer in andere Bereiche durchführen.

Aufgabe:

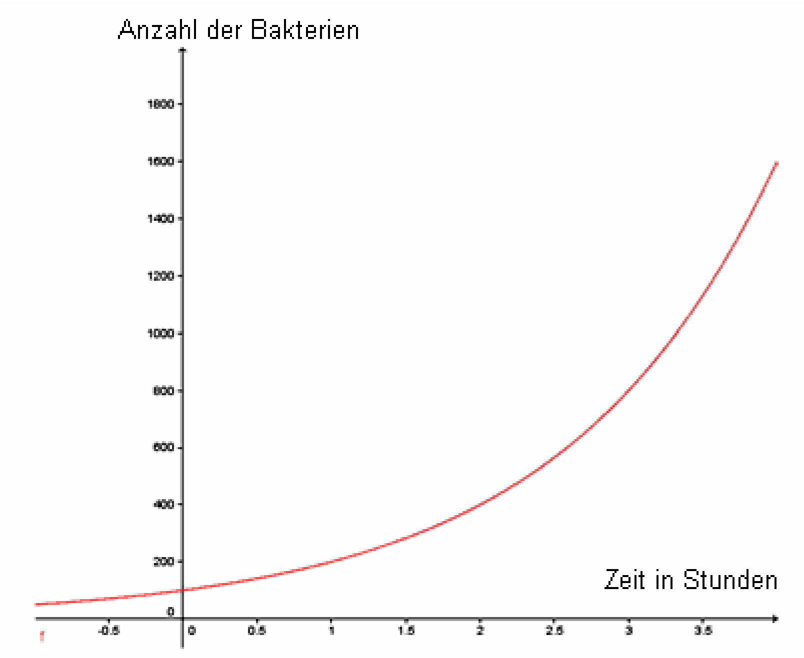
Eine Bakterienkultur verdoppelt sich jede Stunde. Zu Beginn sind 100 Bakterien vorhanden.
a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Bakterienanzahl in einem geeigneten Koordinatensystem.
b) Finden Sie die Funktionsgleichung.

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	x frei gestellt	☐ erforderlich

Mögliche Lösungswege

Zuordnungsgleichung finden:
$y = 100 \cdot 2^x$
Wertetabelle erstellen:
Graph zeichnen

x value	$100.\ 2^x$
0	100.
1	200.
2	400.
3	800.
4	1600.



Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

3 Funktionale Zusammenhänge
- Definitions- und Wertemenge
- Darstellung von Funktionen, Skalierung

A Modellieren und Transferieren
Die charakteristischen Tätigkeiten sind: ...
- mathematische Formeln finden und für das Problem adaptieren.
- ein geeignetes Modell für das Problem finden.
- mich für eine bestimmte mathematische Vorgangsweise entscheiden und die Lösungsabläufe planen.
- mich für geeignete Darstellungsformen entscheiden und diese auch wechseln.
- den Zusammenhang zwischen mathematischen Modellen und der Problemstellung aus dem Alltag herstellen.
- das mathematische Wissen Fächer übergreifend anwenden.

Methodisch didaktische Anmerkungen:
Eine Problemstellung aus der Biologie soll in die mathematische Fachsprache, bzw. in eine Ziel führende mathematische Form gebracht werden. Dabei werden die Eigenschaften der Exponentialfunktion sichtbar (z.B. im Vergleich zum linearen Wachstum). Der Bezug zwischen den verschiedenen Darstellungsformen (Zuordnungsgleichung, Wertetabelle, Graph) ist hier gut sichtbar.

Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Näherungslösung“ (Wilfried Rohm)

Mit funktionalen Zusammenhängen (und algebraischen Objekten) operieren und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen

Aufgabe:

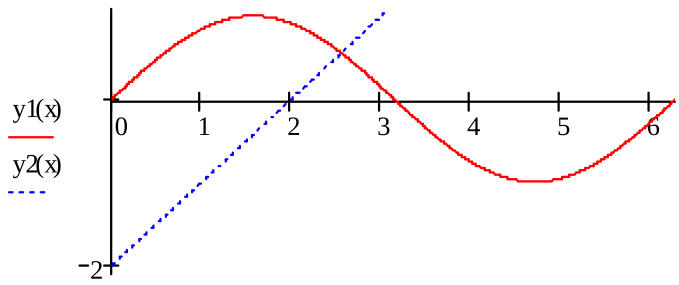
a) Finden Sie für die Gleichung $\sin(x) = x - 2$ eine näherungsweise Lösung durch eine passende graphische Darstellung.
b) Verbessern Sie obiges Ergebnis durch eine numerische Lösung mittels elektronischer Rechenhilfen.

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	☐ frei gestellt	x erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

Die Gleichung ist als transzendente Gleichung nicht symbolisch lösbar. Eine graphische Näherungslösung erhalten wir beispielsweise durch Schnitt der beiden Funktionen

$y_1(x) = \sin(x)$
$y_2(x) = x-2$



Wir nehmen als Näherungswert: $x_n = 2{,}5$
Als approximative Lösung erhält man mit Hilfe eines Computeralgebrasystems oder geeigneten Taschenrechners die Lösung $x_r = 2{,}55419595$

Möglicher Vergleich der Lösungen: Der relative Fehler ergibt sich hier zu $\left|\dfrac{x_n - x_r}{x_r}\right| \cdot 100\ \% = 2{,}1\ \%$

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

3 Funktionale Zusammenhänge
3.3 Darstellungen von Funktionen, Skalierungen
3.4 Eigenschaften von Funktionen

B Operieren und Technologieeinsatz
Charakteristische Tätigkeiten sind

- Ergebnisse in geeigneter Genauigkeit abschätzen, mit Näherungswerten rechnen und sinnvoll deuten
- numerische, symbolische und graphische Methoden unterscheiden und situationsgerecht einsetzen.
- Software zur Problemlösung passend auswählen und nutzen
- „Händisches“ Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile klassifizieren und situationsgerecht einsetzen

Methodisch didaktische Anmerkungen:
Hintergrund der Aufgabe ist die Tatsache, dass zunehmend auch im Unterricht transzendente Gleichungen auftreten, die nur näherungsweise gelöst werden können.

Hinweis:
Es benötigt hinsichtlich der graphischen Lösung eine größere gedankliche Kreativität.

Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Glockenkurve“ (Brigitte Wessenberg)

Aufgabenstellungen, Lösungswege und Lösungen aus der Analysis interpretieren und die passenden Zusammenhänge dokumentieren

Aufgabe:

Die Fläche zwischen der x-Achse und der gezeichneten Kurve der Funktion $y = f(x)$ in den Bildern 1-4 beträgt exakt 1, wenn die Grenzen der Fläche $x = -\infty$ und $x = +\infty$ betragen.
Die Funktionskurve ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und heißt Gauß'sche Glockenkurve.
Welche Integralterme beschreiben die eingefärbten Flächen?
Interpretieren Sie diese Terme und finden Sie die Zusammenhänge aller 4 farbigen Flächen.

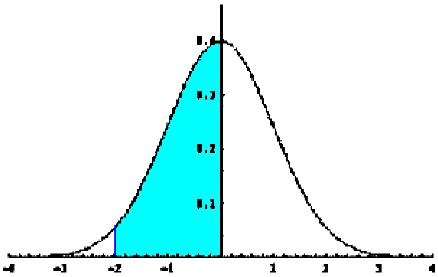


Bild1

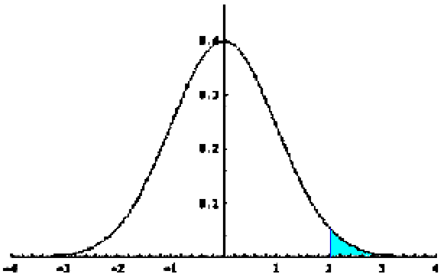


Bild2

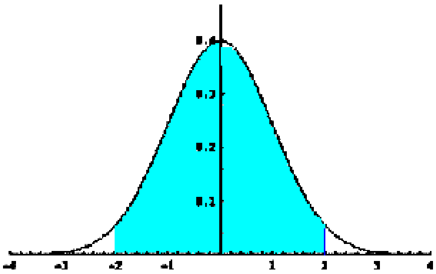


Bild3

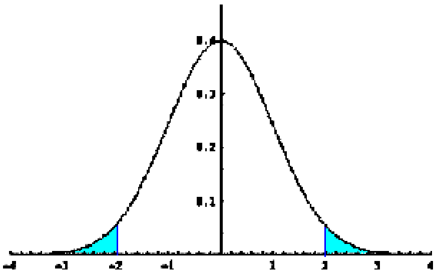


Bild4

Technologieeinsatz	x nicht vorgesehen	frei gestellt	erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

$A_1 = \left|\int_{-2}^{0} y \cdot dx\right|$, $A_2 = \left|\int_{2}^{\infty} y \cdot dx\right|$, $A_3 = 2 \cdot A_1$, $A_4 = 2 \cdot A_2$

Zusammenhänge: $A_1 = 0{,}5 - A_2$ $A_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - A_3)$ $A_3 = 1 - 2 \cdot A_2$ $A_4 = 1 - A_3$

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

4 Analysis
4.5 Bestimmtes Integral und Stammfunktion
4.6 Integrationsregeln

C Interpretieren und Dokumentieren
Charakteristische Tätigkeiten sind

- Lösungsvorschläge auf ihre Bedeutung hin beurteilen
- mathematische Abhängigkeiten beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten
- den Einfluss von Parametern untersuchen und deuten
- die Korrektheit mathematischer Darstellungen sowohl im inner- als auch im außermathematischen Kontext einschätzen bzw. Fehler erkennen
- Dokumentieren des Lösungsweges und der Lösung verbal bzw. durch mathematische Argumentation

Methodisch didaktische Anmerkungen:

Die Aufgabe ist eine wichtige Vorübung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und erleichtert das Verständnis von Flächenintegralen.

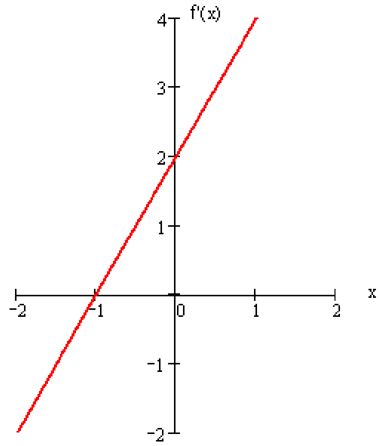
Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Stammfunktion" (Roland Pichler)

Die Vorgangsweise beim Zusammenhang Ableitung – Stammfunktion in präziser Fachsprache verständlich begründen und verschiedene Präsentationstechniken und -mittel nutzen

Aufgabe:

Die Ableitungsfunktion f´(x) hat den unten ersichtlichen Graph (Ausschnitt einer Geraden).



Welche der Funktionen kann Stammfunktion von f´(x) sein?

a) f(x) = 2
b) f(x) = x² + 2
c) f(x) = x² + 2x
d) f(x) = x² + 2x +2

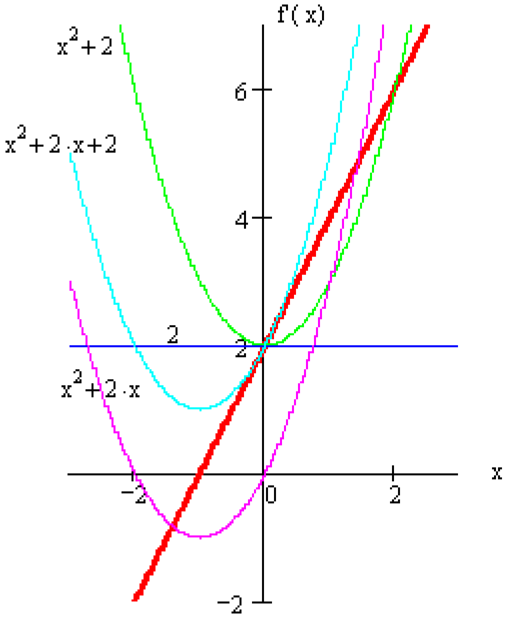
Begründen Sie Ihre Antworten und präsentieren Sie Ihr Ergebnis.

Technologieeinsatz	x nicht vorgesehen	frei gestellt	erforderlich

Mögliche Lösungswege (exemplarisch)

- Aus dem Graph den Funktionsterm der Ableitungsfunktion ermitteln, anschließend mit Hilfe des unbestimmten Integrals die Stammfunktion ermitteln.
  Aus Graph: f´(x) = 2x+2 à $f(x) = \int (2x+2)dx = x^2 + 2x + C$
  Da C unbestimmt ist, sind c) (C = 0) und d) (C = 2) Lösungen

- Die möglichen Stammfunktionen im Graph einzeichnen und aus den Grapheigenschaften die Ableitungsfunktionen herausfinden.
  Man erkennt, dass c) und d) an der Nullstelle von f´(x) ein relatives Minimum haben. Außerdem kann man sie durch Verschieben in y-Richtung ineinander Überführen, das heißt, sie unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, daher haben sie die gleiche Ableitungsfunktion.



- Die Präsentationen können mit Hilfe verschiedener Software (Mathcad, Mathematica, Excel,..) oder über ein sauberes Tafelbild, Mitschrift oder Folien erfolgen (letztlich hängt das von den eingeübten Verhaltensweisen ab)

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

4 Analysis

4.3 Differenzen- und Differentialquotient, Differenzierbarkeit und Ableitungsfunktion
4.5 Bestimmtes Integral und Stammfunktion
4.6 Integrationsregeln

D Argumentieren und Kommunizieren

Charakteristische Tätigkeiten sind

- Vermutungen formulieren und begründen
- die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren
- den Einsatz mathematischer Modelle und Rechenverfahren erläutern und begründen

Methodisch didaktische Anmerkungen:

Wesentlich dabei ist die Kenntnis, dass die Stammfunktion eine Funktionenschar ist mit einer unbestimmten additiven Konstanten.

Hinweis:
Eine erhöhte Anzahl von Denkschritten ist nötig.

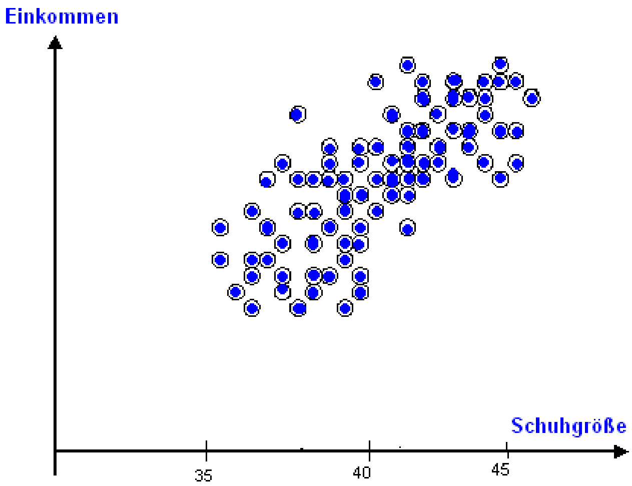
Schulform	x HTL	x HAK	x HUM/HLFS	x BA

„Schuhgröße“ (Wilfried Rohm)

Typische Problemstellungen aus dem Bereich der Stochastik mit den Mitteln der Fachsprache beschreiben, Modelle und Rechenverfahren reflektieren, begründen und kommunizieren

Aufgabe:

In einer großen Firma wurde eine bestimmte Anzahl von Personen **zufällig** ausgewählt und das Einkommen der jeweiligen Schuhgröße der Person gegenübergestellt.



Analysiere das Diagramm und argumentiere unter Berücksichtigung folgender Fragen:

- Was kann aus diesen Daten mit Mitteln der Regression und Korrelation auf Grund des statistischen Zahlenmaterials geschlossen werden?
- Gibt es Gründe, an diesen Schlussfolgerungen zu zweifeln?
- Stelle Überlegungen an, die als Begründung für das beobachtete Datenmaterial dienen könnten. Mit anderen Worten: Warum entsteht eine (offensichtliche) Scheinkorrelation

Technologieeinsatz	x nicht vorgesehen	frei gestellt	erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

- direkte Proportionalität: je größer die Schuhgröße – je größer das Einkommen
- es gibt keinen direkten kausalen Zusammenhang Schuhgröße – Einkommen
- Möglichkeit: Männer und Frauen sind offenbar gemischt – im Schnitt verdienen die Männer besser UND haben die größere Schuhgröße! Innerhalb dieser Gruppen zufällige Verteilung des Einkommens (Man kann sich die Datenmenge aus 2 verschiedenen, sich überlappenden, etwa kreisförmig angeordneten Punktwolken entstanden denken)

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

5 Stochastik
5.1 Beschreibende Statistik: grafische Darstellungen und Kennzahlen
5.2 Regression und Korrelation

D Argumentieren und Kommunizieren
Charakteristische Tätigkeiten sind

- mathematische Denkschritte auch im Team entwickeln, ausarbeiten und reflektieren
- Vermutungen formulieren und begründen
- die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren
- den Einsatz mathematischer Modelle und Rechenverfahren erläutern und begründen
- Fehler erkennen und mit mathematischer Argumentation begründen.

III. 2 Beispiele spezifisch für die einzelnen Sparten der BHS

2 - A,B Modellieren und Transferieren, Operieren und Technologieeinsatz in Algebra und Geometrie

Schulform	x	HTL		HAK		HUM/ HLFS		BA

„Parkettboden“ (Josef Urthaler)

Für eine Problemstellung in Algebra und Geometrie ein geeignetes Modell finden und operieren können

Aufgabe:

In einem Zimmer wird ein Parkettboden schwimmend verlegt. Dabei wird (entgegen der Verlegeanleitung) der Boden ohne Dehnfugen exakt zwischen den Mauern (Abstand 4 m) eingepasst.
Infolge eines Wetterumschwungs erhöht sich die Luftfeuchtigkeit im Raum und zum Leidwesen des Hausbesitzers wölbt sich der Boden in der Mitte des Raumes um 5 cm. Ermitteln Sie die Ausdehnung des Parkettbodens.

Technologieeinsatz		nicht vorgesehen	x	frei gestellt		erforderlich

Mögliche Lösungswege:

1. Lösungsweg: Annahme, der Boden biegt sich in einem Kreisbogen, so kann Pythagoras angesetzt werden:
   $r^2 = (r - 5)^2 + 200^2 \Rightarrow r = 4002{,}5$ cm,
   $\tan(\alpha) = 200/3997{,}5 \Rightarrow \alpha = 0{,}04999$rad, $b = 2 \cdot \alpha \cdot r = 400{,}17$cm,
   Also beträgt die Ausdehnung 1,7 mm.

2. Lösungsweg (grobe Abschätzung): anstelle des halben Kreisbogens wird mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes gerechnet ($2 \cdot \sqrt{(200^2+5^2)} – 200 = 0{,}13$),
   so ergibt sich eine Ausdehnung von 1,3 mm.

Kommentar

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

2 Algebra und Geometrie
2.1 Variable, Terme und Formeln
2.4 Elementare Geometrie und Trigonometrie

A Modellieren und Transferieren
Charakteristische Tätigkeiten sind
- ein geeignetes Modell für das gestellte Problem finden und erklären
- alltagssprachliche bzw. berufsspezifische Formulierungen in die Sprache der Mathematik übersetzen
- sich für eine bestimmte mathematische Vorgangsweise entscheiden und die Lösungsabläufe planen

B Operieren und Technologieeinsatz
Charakteristische Tätigkeiten sind
- einfache Berechnungen im Kopf durchführen
- Ergebnisse in geeigneter Genauigkeit abschätzen, mit Näherungswerten rechnen und sinnvoll deuten
- geometrisches Grundlagenwissen sinnvoll einsetzen

Methodisch didaktische Anmerkungen:
Wesentliches Merkmal der Modellbildung soll die Wahl einer vernünftigen Vorgangsweise sowie eine plausible Abschätzung sein. Die Überlegungen sollen aber jedenfalls begründbar und nachvollziehbar sein!

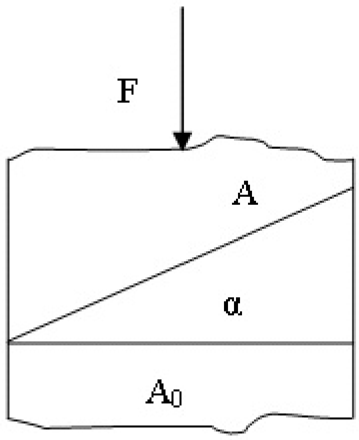
Schulform	x	HTL	☐	HAK	☐	HUM/ HLFS	☐	BA

„Druck auf geneigte Schnittflächen“ (Josef Urthaler)

Im Zusammenhang mit geometrischen Problemstellungen argumentieren und kommunizieren

Aufgabe:

Eine Betonprobe wird durch die Kraft F laut Skizze auf Druck beansprucht.



A_0 sei der Querschnitt der Probe, A eine unter dem Winkel α schräg liegende Schnittfläche durch die Probe. Infolge der Kraft F kommt es bezüglich der Schnittfläche zu einer Normalkraft $F_N = F \cdot \cos(\alpha)$ und zu einer Tangentialkraft $F_T = F \cdot \sin(\alpha)$. F_N ruft in der Schnittfläche A eine Normalspannung σ_N hervor, bzw. F_T eine Tangentialspannung σ_T .

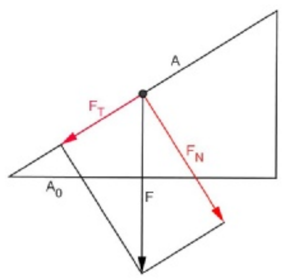
$$\sigma_N = \frac{F \cdot \cos^2\alpha}{A_0} \qquad \sigma_T = \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{A_0}$$

a) Begründen Sie die angegebenen Formeln für F_N, F_T, σ_N und σ_T und erläutern Sie weiters, warum bei α = 0° die größte Normalspannung und bei α = 45° die größte Schubspannung auftritt.
b) Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang das typische Resultat einer Betondruckprüfung.

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	x frei gestellt	☐ erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

a) Normalspannungen sind Spannungen, die durch Normalkräfte (stehen normal auf die jeweilige Schnittfläche) hervorgerufen werden. Tangentialspannungen werden durch Tangentialkräfte (wirken parallel zur Schnittfläche) hervorgerufen. Daher wird die Kraft F in zwei Komponenten zerlegt, wobei die Komponente F_N normal auf die Schnittfläche und andere Komponente F_T parallel zur Schnittfläche wirkt.
Die Schnittfläche ergibt sich nach dem Projektionssatz $A = A_0/\cos(\alpha)$. Aus der allgemeinen Beziehung σ = F/A ergeben sich die Formeln für σ_N und σ_T.
Durch Differenzieren nach α und Nullsetzen bekommt man die gewünschten Winkel.



b) Wird eine Betonprobe einem zunehmenden Druck ausgesetzt, so kommt es zum Herausbrechen von Betonstücken entlang von 45° geneigten Flächen.

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

2 Algebra und Geometrie
2.4 Elementare Geometrie und Trigonometrie
2.5 Vektoren

4 Analysis
4.4 Ableitungsregeln

D Argumentieren und Kommunizieren
Charakteristische Tätigkeiten sind

- mathematische Denkschritte auch im Team entwickeln, ausarbeiten und reflektieren
- Vermutungen formulieren und begründen
- die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren

Methodisch didaktische Anmerkungen:

Aufgabe benötigt doch etliche gedankliche Schritte und ist daher als komplexere Fragestellung einzustufen.

Schulform	x HTL	HAK	HUM/HLFS	BA

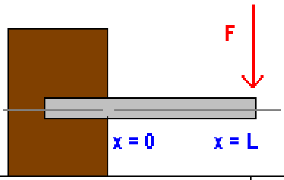
„Elastische Linie“ (Roland Pichler)

Operationen in der Analysis durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen

Aufgabe:

Der Zusammenhang zwischen elastischer Linie *z(x)* eines belasteten Balkens und dem Biegemoment $M_b(x)$ ist für konstante *E* und *I* folgendermaßen gegeben: $z''(x) = -\frac{M_b(x)}{E \cdot I}$

Gegeben ist ein linksseitig einseitig eingespannter Kragträger der Länge L mit Einzellast F am Trägerende .



Zeigen Sie, dass bei Verdoppelung der Trägerlänge L die maximale Durchbiegung verachtfacht wird.

Technologieeinsatz	x nicht vorgesehen	frei gestellt	erforderlich

Mögliche Lösungswege

- Bestimmung von $M_b(x) = -F(L - x)$ mit elementaren Methoden der Mechanik
- Zweimaliges Integrieren, Angeben der Randbedingungen $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$
- Ermitteln der maximalen Durchbiegung (tritt bei x = L auf)
- z(L) à z(2L)

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund

4 Analysis
4.5 Bestimmtes Integral und Stammfunktion
4.6 Integrationsregeln
4.10 Differentialgleichungen (HTL)

B Operieren und Technologieeinsatz
Charakteristische Tätigkeiten sind
- einfache Berechnungen im Kopf durchführen
- Ergebnisse in geeigneter Genauigkeit abschätzen, mit Näherungswerten rechnen und sinnvoll deuten
- „Händisches“ Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile klassifizieren und situationsgerecht einsetzen

Methodisch didaktische Anmerkungen:

Die Bestimmung des Biegemoments $M_b(x)$ steht in engem Zusammenhang mit den Methoden der Statik Für Schüler der Fachrichtungen Maschineningenieurwesen, Bautechnik und verwandter Abteilungen wird das fachspezifische Wissen vorausgesetzt.

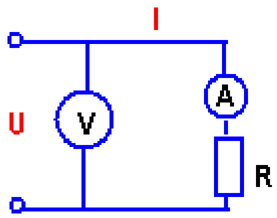
Schulform	[x] HTL	[ ] HAK	[ ] HUM/HLFS	[ ] BA

„Leistungsermittlung“ (Wilfried Rohm))

Mathematische Denkschritte entwickeln, ausarbeiten und reflektieren und die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren

Aufgabe:

Die Messung von Spannung U und Stromstärke I an einem Widerstand R erfolgt mit den durch die Messgeräte vorgegebenen Genauigkeiten $\frac{\Delta U}{U}$ bzw. $\frac{\Delta I}{I}$.



Begründen Sie, dass der relative Fehler der Leistung P als Summe der relativen Fehler von U und I ermittelt werden kann.

Technologieeinsatz	[ ] nicht vorgesehen	[x] frei gestellt	[ ] erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

- Für die Leistung gilt: $P = U \cdot I$.   P wird als Funktion von U und I aufgefasst.
- Berechnung des absoluten Fehlers von P mit Hilfe der Formel für die lineare Fehlerfortpflanzung:

$$|\Delta P| \leq \left|\frac{\partial P}{\partial U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial I} \cdot \Delta I\right| = |I \cdot \Delta U| + |U \cdot \Delta I|$$

Daher ergibt sich:

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right| \leq \left|\frac{I \cdot \Delta U}{U \cdot I}\right| + \left|\frac{U \cdot \Delta I}{U \cdot I}\right| = \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|$$

In Worten: Der relative Fehler bei der Berechnung der Leistung aus Strom und Spannung kann (bis auf Fehler höherer Ordnung) durch die Summe der relativen Fehler von U und I abgeschätzt werden.

Kommentar:

Für die Lösung sind folgende Aspekte im Vordergrund:

4 Analysis
4.9 Fehlerrechnung

D Argumentieren und Kommunizieren
Charakteristische Tätigkeiten sind
- mathematische Denkschritte auch im Team entwickeln, ausarbeiten und reflektieren
- Vermutungen formulieren und begründen
- die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren
- den Einsatz mathematischer Modelle und Rechenverfahren erläutern und begründen

Methodisch didaktische Anmerkungen:
Für Schüler der Fachrichtung Elektrotechnik und verwandter Abteilungen wird das fachspezifische Wissen vorausgesetzt.

Schulform	x HTL-ET	HAK	HUM/ HLFS	BA

„Laplacetransformation“ (Wilfried Rohm)

Argumentieren und Kommunizieren auf dem Gebiet der Analysis

Aufgabe:

Erläutern Sie die Grundidee der Laplace-Transformation und begründen Sie, weshalb diese in der Elektrotechnik gerne verwendet wird. Versuchen Sie, für alle Ihre Argumente auch Begründungen anzugeben.			
Technologieeinsatz	nicht vorgesehen	x frei gestellt	Erforderlich

Möglicher Lösungsweg

Die Aufgabe ist völlig offen formuliert, daher hängt die Lösungserwartung stark von den Gegebenheiten des Unterrichts ab. Einige Stichworte zur (möglichen) Orientierung:

- $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt \qquad (s = \delta + j\cdot\omega,\ \delta > 0)$

  Die Laplacetransformation stellt eine Integraltransformation in einen komplexen Bildbereich dar. Formal gibt es eine enge Verwandtschaft zur Fouriertransformation, der Parameter δ>0 wird eingeführt, damit das uneigentliche Integral für wichtige Funktionen (Sinusfunktion, Einschaltfunkttion..) überhaupt existiert.

- Die Laplacetransformation macht aus Differentialgleichungen algebraische Gleichungen. Begründung: Die Ableitung einer Zeitfunktion f(t) führt zur Multiplikation mit der Variablen im Bildbereich (s) führt, wobei auch die Anfangsbedingung eingeht: $\mathbf{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\cdot F(s) - f(0)$

  Die algebraische Gleichung kann sodann im Bildbereich gelöst werden. Durch Rücktransformation erhält man die Lösung im Zeitbereich.

- In der Elektrotechnik werden vor allem Einschaltvorgänge mit der Laplacetransformation einfacher behandelt, da auch unstetige Funktionen (Sprungfunktionen, Dirac-Impuls, Impulsfunktionen,…) zu algebraischen Ausdrücken im Bildbereich führen.

  Beispiele: $\textit{Einheitssprung}\ \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \qquad \mathbf{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$

  $\textit{Impulsfunktion}\ f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \mathbf{L}\{f(t)\} = \frac{1-e^{-a\cdot s}}{s}$

- Der Elektrotechniker umgeht meist das Problem, die Differentialgleichung im Zeitbereich anzusetzen, um diese sodann in den Bildbereich zu transferieren. Die Laplacetransformation von Spannungen oder Strömen verschiedener Schaltelemente führt nämlich zu Formeln im Bildbereich, welche analog zur Gleichstrom- und Wechselstromtechnik aufgebaut sind.
  Am Beispiel der Spule schaut das folgendermaßen aus:

  Zeitbereich: $u(t) = L\cdot\frac{di(t)}{dt} \quad bzw. \quad i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt$

  Bildbereich: $U(s) = s\cdot L\cdot I(s) \quad bzw. \quad I(s) = \frac{U(s)}{s\cdot L} \ \Rightarrow\ \frac{U(s)}{I(s)} = s\cdot L$

  Analogie zur Wechselstromtechnik: $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{X_L} = j\cdot\omega\cdot L$

Daher kann häufig im Bildbereich direkt eine „Übertragungsfunktion“ G(s) angesetzt werden und man erhält die Ausgangsfunktion im Bildbereich nach der Formel:

$$U_{Ausgang}(s) = G(s) \cdot U_{Eingang}(s)$$

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

4 Analysis

4.10 Differentialgleichungen
4.11 Integraltransformationen

D Argumentieren und Kommunizieren

Charakteristische Tätigkeiten sind

- die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren
- den Einsatz mathematischer Modelle und Rechenverfahren erläutern und begründen
- verschiedene Präsentationstechniken und -mittel nutzen

Methodisch/Didaktische Hinweise:

Derartige sprachlich orientierte Aufgabenstellungen sollten auf allen Stufen der Ausbildung vorkommen, weil sie das Verständnis und den Überblick sehr fördern. Werden sie auch in der Leistungsbeurteilung eingesetzt, ist allerdings eine sehr flexible Vorgangsweise erforderlich.
Wenn dies regelmäßig im Unterricht geübt wurde, erscheint ein Einsatz derartiger Aufgabenstellungen bei der Reifeprüfung als durchaus sinnvoll.

Schulform	x HTL	HAK	HUM/HLFS	BA

„Körpergröße“ (Markus Hörhager)

Operationen in der Stochastik durchführen und situationsgerecht technische Hilfsmittel einsetzen

Aufgabe:

Die Größe von männlichen Schülern im Alter von 18 Jahren wurde an 100 Testpersonen untersucht.

Es wurde folgende Klasseneinteilung gewählt:

Klassenmitte *in cm*	Klasse *cm*	Strichliste	n_j
165	$160 < x \le 170$	II	2
171	$170 < x \le 172$	III	3
173	$172 < x \le 174$	~~IIII~~ III	8
175	$174 < x \le 176$	~~IIII~~ IIII	9
177	$176 < x \le 178$	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
179	$178 < x \le 180$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	19
181	$180 < x \le 182$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	18
183	$182 < x \le 184$	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
185	$184 < x \le 186$	~~IIII~~ III	8
187	$186 < x \le 188$	IIII	4
189	$188 < x \le 190$	III	3
191	$190 < x \le 192$	II	2
196	$192 < x \le 202$	II	2

Die Daten legen die Annahme einer normalverteilten Grundgesamtheit nahe, von der im Folgenden ausgegangen wird..

a) Schätzen Sie μ und σ dieser Grundgesamtheit.
b) Wie groß ist der Anteil der Schüler der Körpergröße 174 cm unterschreitet?

Technologieeinsatz	nicht vorgesehen	x frei gestellt	erforderlich

Möglicher Lösungsweg

- Berechnung von $\bar{x}$ und s aus der Stichprobe und als Schätzwerte für μ und σ verwenden,
  $\bar{x}$ =179,98 cm, s = 5,45 cm
- $P(x \le 174) = G_{NV}(174; \mu; \sigma) = 13{,}7\%$

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

5 Stochastik
5.1 Beschreibende Statistik
5.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

B Operieren und Technologieeinsatz
Charakteristische Tätigkeiten sind
- Software zur Problemlösung passend auswählen und nutzen.
- „Händisches“ Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile klassifizieren und situationsgerecht einsetzen.

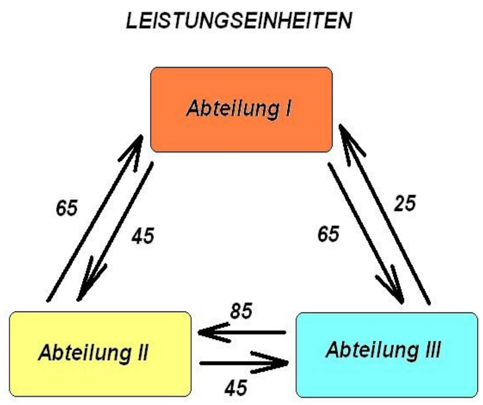
Schulform	☐ HTL	☒ HAK	☐ HUM/HLFS	☐ BA

„Gozintograph“ (Lore Eisler)

Ein Modell mit Matrizen bilden

Aufgabe:

Die Leistungsverflechtung in einem Betrieb mit drei Abteilungen A,B und C ist durch folgenden Gozintograf gegeben:



Stellen Sie die zugehörige Matrix auf.

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	☒ frei gestellt	☐ erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

Von (Zeile) An (Spalte)	**I**	**II**	**III**
I	0	45	65
II	65	0	45
III	25	85	0

Daraus ergibt sich folgende Leistungsmatrix: $\begin{bmatrix} 0 & 45 & 65 \\ 65 & 0 & 45 \\ 25 & 85 & 0 \end{bmatrix}$

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:
2 Algebra und Geometrie
2.6 Matrizen

A Modellieren und Transferieren
Charakteristische Tätigkeiten sind
- Aufgabenstellungen auf das Wesentliche zusammenfassen und präzisieren
- mathematische Darstellungen finden und für das Problem adaptieren
- ein geeignetes Modell für das gestellte Problem finden und erklären
- alltagsprachliche bzw. berufsspezifische Formulierungen in die Sprache der Mathematik übersetzen
- sich für eine bestimmte mathematische Vorgangsweise entscheiden und die Lösungsabläufe planen
- sich für verschiedene Darstellungsformen entscheiden und diese auch wechseln
- den Zusammenhang zwischen mathematischen Modellen und der Problemstellung aus Alltag und Wissenschaft herstellen
- das mathematische Wissen fächerübergreifend anwenden.

Schulartenspezifische Ausprägung

Schulform	☐ HTL	☒ HAK	☒ HUM/HLFS	☐ BA

„Investition“ (Lore Eisler)

Mit geometrische Reihen in finanzmathematischem Kontext operieren können und den Einsatz passender Technologie sinnvoll entscheiden

Aufgabe:

Der Preis einer Anlage beträgt €100 000.-. Man erwartet einen Gewinn von je € 30 000.- in den ersten drei Jahren, in den folgenden zwei Jahren je € 20 000.-.
Nach 5 Jahren beträgt der Restwert € 25 000.-.
Am Ende jedes zweiten Jahres sind Wartungsarbeiten von je € 2 500.- notwendig.
Berechnen Sie den internen Zinssatz.
Würden Sie diese Investition nach den derzeitigen Gegebenheiten des Kapitalmarkts tätigen?

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	☒ frei gestellt	☐ erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

r…Aufzinsungsfaktor, i = p/100 …Zinssatz, n…Anzahl der Raten, ra…Ratenhöhe, bn…Barwert von n Raten
r = 1+ i

$bn\,(ra,r,n) = ra\,\frac{1-r^{-n}}{r-1}$

zB mit Einsatz von CAS-Rechner:
Eingabe bn (30000, r, 3) + bn (20000,r,2) · r^{-3} +25000r^{-5} sto> e(r)
100000+2500· r^{-2} +2500·r^{-4} sto> k(r)
e(r) -k(r) = 0
r = 1,1458
Interner Zinssatz 14,58%

bn wurde abgespeichert als Funktion einer nachschüssigen Rente, abhängig von der Rate, dem Aufzinsungsfaktor und der Dauer.

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

3 Funktionale Zusammenhänge
3.1 Empirische sowie diskrete bzw. kontinuierliche mathematische Funktionen
3.2 Definitions- und Wertemenge
3.6 Zahlenfolgen und Reihen

B Operieren und Technologieeinsatz
Charakteristische Tätigkeiten sind
- numerische, symbolische und graphische Methoden unterscheiden und situationsgerecht einsetzen.
- Software zur Problemlösung passend auswählen und nutzen
- „Händisches“ Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich

Hinweis:
Dieses Beispiel ist nur im inhaltlichen Kontext spezifisch für die HAK und die HUM, Grundwissen der Finanztermini ist Voraussetzung.

Schulartenspezifische Ausprägung

Schulform	☐ HTL	☒ HAK	☒ HUM/HLFS	☐ BA

„Gewinn“ (Brigitte Wessenberg)

Wirtschaftsmathematische Modelle interpretieren und die Lösungsvorschläge dokumentieren

Aufgabe:

Der Gewinn G für ein bestimmtes Produkt in Abhängigkeit von der Absatzmenge x lässt sich durch die Funktionsgleichung $G(x) = -x^3 + 2x^2 + 75x - 100$ beschreiben. x ist hier als Absatzmenge in Mengeneinheiten ME zu verstehen.
Wie lässt sich aus dieser Angabe bestimmen, bei welchen Absatzmengen überhaupt ein Gewinn zu erwarten ist, und wann der Gewinn optimal sein wird?

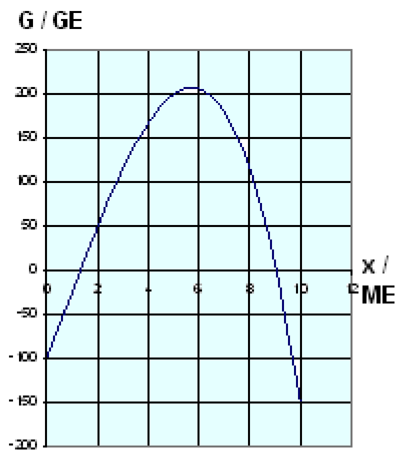
Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	☒ frei gestellt	☐ erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

Grafik händisch

Wertetabelle:

x	G
0	-100
2	50
4	168
5	200
6	206
7	180
8	116
9	8
10	-150



Aus der Grafik entnimmt man die Gewinnzone näherungsweise bei den Absatzmengen von $x_1 = 1{,}4$ ME bis $x_2 = 9{,}1$ ME.

Den optimalen Gewinn findet man laut Grafik bei ca. 5,6 ME.

Interpretation: Der Einfluss der Gesamtkosten der Produktion bewirkt das Auftreten von unteren und oberen Gewinngrenzen und auch des Gewinnoptimums. Bei größerer Absatzmenge sind i.A. auch die Produktionskosten höher und können zu einer Gewinnverringerung führen.

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

3 Funktionale Zusammenhänge
- 3.1 Empirische sowie diskrete bzw. kontinuierliche mathematische Funktionen
- 3.2 Definitions- und Wertemenge
- 3.3 Darstellung von Funktionen in unterschiedlichen Formen, Skalierungen
- 3.4 Eigenschaften von Funktionen

C Interpretieren und Dokumentieren
Charakteristische Tätigkeiten sind
- Ergebnisse beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten
- numerisch, grafisch oder symbolisch gegebene Abhängigkeiten beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten
- den Einfluss von Parametern untersuchen und deuten
- Dokumentieren des Lösungsweges und der Lösung entweder verbal oder durch mathematische Argumentation.

Hinweis: Dieses Beispiel ist nur im Kontext schulartenspezifisch für HAK und HUM, Grundwissen der Wirtschaftsbegriffe ist Voraussetzung

Schulartenspezifische Ausprägung

Schulform	☐ HTL	☐ HAK	☒ HUM/HLFS	☐ BA

„Hühnereier“ (Jörg Kliemann)

Mit Methoden der Stochastik operieren und geeignete technische Hilfsmittel einsetzen

Aufgabe:

Die Verordnung des Bundesministers für Land- und Forstwirtschaft, Umwelt und Wasserwirtschaft über Vermarktungsnormen für Eier (BGBl. II Nr. 347/2004) verweist auf die entsprechenden europäischen Rechtsnormen:

> *§ 1. Die Vorschriften dieser Verordnung gelten für die Durchführung nachstehender Rechtsakte der Europäischen Gemeinschaften, die im Rahmen der gemeinsamen Marktorganisation für Eier erlassen sind:*
> - *Verordnung (EWG) Nr. 1907/90 des Rates über bestimmte Vermarktungsnormen für Eier, ABl. Nr. L 173 vom 6.7.1990, S. 5;*
> - *Verordnung (EG) Nr. 2295/2003 der Kommission mit Durchführungsvorschriften für die Verordnung (EWG) Nr. 1907/90 des Rates über bestimmte Vermarktungsnormen für Eier, ABl. Nr. L 340 vom 24.12.2003, S. 16.*

In der Verordnung (EG) Nr. 2295/2003 der Kommission vom 23. Dezember 2003 (L 340/19) mit Durchführungsbestimmungen zur Verordnung (EWG) Nr. 1907/90 des Rates über bestimmte Vermarktungsnormen für Eier (Amtsblatt der Europäischen Union 24.12.2003) sind Gewichtsklassen für Hühnereier definiert:

> *Sortierung von Eiern der Klasse A*
> *(1) Eier der Klasse A und „gewaschene Eier“ werden nach folgenden Gewichtsklassen sortiert:*
> *— XL — Sehr groß: 73 g und darüber,*
> *— L — Groß: 63 bis unter 73 g,*
> *— M — Mittel: 53 bis unter 63 g,*
> *— S — Klein: unter 53 g.*

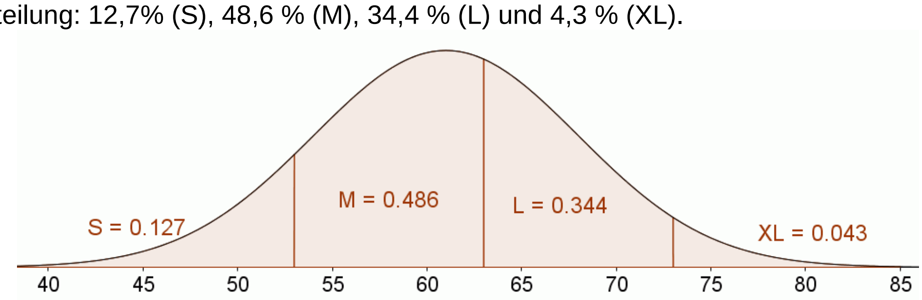
Berechnen Sie unter der Annahme einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = 61$ g und einer Varianz $\sigma^2 = 49$ g für die Masse von Hühnereiern die Häufigkeitsverteilung für die einzelnen Klassen.

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	☒ frei gestellt	☐ erforderlich

Möglicher Lösungsweg:

Beispielsweise unter Einsatz einer Tabellenkalkulation:
=NORMVERT(53;61;7;WAHR) liefert 12,7%
=NORMVERT(63;61;7;WAHR) liefert 61,2%
=NORMVERT(73;61;7;WAHR) liefert 95,7%
oder eines Grafikrechners:
normalcdf(0,53,61,7) liefert 12,7%
normalcdf(53,63,61,7) liefert 48,6%
normalcdf(63,73,61,7) liefert 34,4%
normalcdf(73,1000,61,7) liefert 4,3%

Häufigkeitsverteilung: 12,7% (S), 48,6 % (M), 34,4 % (L) und 4,3 % (XL).



Alternativ ist auch die Berechnung der Werte aus einer Tabelle möglich.

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

5 Stochastik
5.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

B Operieren und Technologieeinsatz
Charakteristische Tätigkeiten sind:

- Software zur Problemlösung passend auswählen und nutzen.
- „Händisches" Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile klassifizieren und situationsgerecht einsetzen.

Hinweis: Dieses Beispiel ist im Kontext schulartenspezifisch für die HUM/HLFS

3-D Argumentieren und Kommunizieren mit funktionalen Zusammenhängen

Schulartenspezifische Ausprägung

Schulform	☐ HTL	☐ HAK	☐ HUM/HLFS	x BA

„Vergessenskurve" (Sissi Hammerl)

Mit funktionalen Zusammenhängen und algebraischen Objekten operieren

Aufgabe:

Aus der unten stehenden Tabelle kann man die Ergebnisse des Lernforschers Hermann Ebbinghaus, der sich mit der Gedächtnisleistung in Abhängigkeit von der Zeit (Vergessenskurve, 1885) beschäftigte, ablesen. Er verwendete für seine Untersuchungen „sinnfreie" Silben.
Seine Versuche ergaben folgende Daten:

vergangene Zeit in Tagen	0	1	2	5
durchschnittliche Anzahl der erinnerten Silben	13	6	5	3,46

Ebbinghaus fand zusätzlich heraus, dass 20% der gelernten Silben für Jahrzehnte im Gedächtnis haften bleiben.
Jemand schlug für die Vergessensfunktion folgenden Zusammenhang vor:

$f(x): R \to R;\ y = -7.x^{0.1926} + 13$

Argumentieren Sie, ob diese Funktion mit den Erkenntnissen von Ebbinghaus vereinbar ist.
Beachten Sie längere Zeiträume!

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	☐ frei gestellt	x erforderlich

Möglicher Lösungsweg:
Durch Einsetzen der Werte in die Gleichung erkennt man, dass die Kurve zwischen 24 und 25 Tagen eine Nullstelle aufweist und daher mit den Erkenntnissen der verbleibenden 20% nicht übereinstimmt.

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund:

3 Funktionale Zusammenhänge
1. empirische sowie diskrete bzw. kontinuierliche mathematische Funktionen
2. Definitions- und Wertemenge
3. Darstellung von Funktionen in unterschiedlichen Formen, Skalierungen
4. Eigenschaften von Funktionen

D Argumentieren und Kommunizieren
Charakteristische Tätigkeiten sind
- mathematische Denkschritte auch im Team entwickeln, ausarbeiten und reflektieren
- Vermutungen formulieren und begründen
- die Vorgangsweise in präziser Fachsprache verständlich begründen und präsentieren
- den Einsatz mathematischer Modelle und Rechenverfahren erläutern und begründen
- verschiedene Präsentationstechniken und -mittel nutzen

Methodisch didaktische Anmerkungen:
Eine Problemstellung aus dem Bereich Psychologie soll in die mathematische Fachsprache, bzw. in eine Ziel führende mathematische Form gebracht werden

Hinweis: Dieses Beispiel ist nur im Kontextbezug schulartenspezifisch für die BA.

Schulartenspezifische Ausprägung

Schulform	☐ HTL	☐ HAK	☐ HUM/HLFS	☒ BA

„Gedächtnistraining“ (Sissi Hammerl)

Einfache statistische Zusammenhänge erfassen

Aufgabe:

Ein/e Kindergärtner/in will mit einem Memoryspiel (10 Paare) den Übungseffekt in Bezug auf die Gedächtnisleistung messen.
Sie teilt ihre Gruppe in 2 Untergruppen zu je 10 Kindern ein.
Die erste Gruppe (Vergleichsgruppe) spielt das Spiel nicht öfter als sonst.
Die 2. Gruppe (Versuchsgruppe) spielt das Spiel 2 Wochen jeden Tag einmal.
Nach der Übungszeit macht sie folgenden Versuch:
Für jedes Kind werden zuerst die 20 Karten aufgelegt und dann umgedreht. Jedes Kind soll so viele Paare wie möglich finden.
Dazu schreibt sich der/die Pädagoge/in die Trefferquoten jedes einzelnen Kindes auf:

Vergleichsgruppe	0, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 5, 3, 4
Versuchsgruppe	0, 1, 0, 2, 1, 10, 4, 2, 1, 1

Um eine Vergleichsmöglichkeit zu finden, berechnet der/die Kindergärtner/in die Mittelwerte.
Sie schließt daraus, dass das oftmalige Memoryspielen die Gedächtnisleistung signifikant verbessert.
Hat sie damit Recht?
Begründen Sie Ihre Überlegungen.

Technologieeinsatz	☐ nicht vorgesehen	☒ frei gestellt	☐ erforderlich

Möglicher Lösungsweg
Der Mittelwert der Vergleichsgruppe beträgt 1,8, jener der Versuchsgruppe 2,2.
Der Median der Vergleichsgruppe beträgt 1,5, jener der Versuchsgruppe 1.
Das zeigt, dass die Kinder der Vergleichs- und Versuchsgruppe eigentlich bis auf ein besonders begabtes Kind gleich abschneiden, bzw. die Versuchsgruppe schlechter abschneidet.
Eine Verbesserung durch das oftmalige Spielen ist daher nicht erkennbar.

Kommentar:

Für die Lösung stehen folgende Aspekte im Vordergrund

5 Stochastik
5.1 Beschreibende Statistik

B Interpretieren und Dokumentieren
Die charakteristischen Tätigkeiten sind:
- Mathematische Zusammenhänge erfassen.
- Die Korrektheit mathematischer Darstellungen sowohl im inner- als auch im außermathematischen Kontext einschätzen bzw. Fehler erkennen.

Methodisch didaktische Anmerkungen:
Fachspezifischer Kontext: die Zusammensetzung der Gruppen muss bezüglich des Alters, des Geschlechts und möglicherweise auch des Entwicklungsstandes gleichwertig sein.

Hinweis: Dieses Beispiel ist nur im Kontextbezug schulartenspezifisch für BA.

IV Weiterführende Literatur und Internetadressen

Baden Württemberg, 2007: Homepage des Regierungspräsidiums (Schulabteilung) Karlsruhe Fachbereich Mathematik (Gymnasien): Bildungsstandards 2004: http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsplaene/Gymnasium/Gymnasium_Bildungsplan_Gesamt.pdf

BMBWK (Hrsg.) 2005: Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe. BMBWK, Sektion I. Internet: www.gemeinsamlernen.at

Blum, Werner (Hrsg.) 2006: „Bildungsstandards Mathematik konkret“. Verlag Cornelsen. ISBN-10: 3-589-22321-9

Haider, Günter (Hrsg.) 2004: PISA 2003 Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Leykam Verlag Graz. ISBN 3-70117507-1. Internet: http://www.bifie.at/bildungsstandards

Klieme, Eckhard 2003: „Zur Entwicklung Nationaler Bildungsstandards“ Bundesministerium für Bildung und Forschung, Deutschland (Hrsg.). Bestellung schriftlich an den Herausgeber BMBF Referat Öffentlichkeitsarbeit, D-53170 Bonn, Postfach 300235

KMK (Hrsg.), 2004: Bildungsstandards in Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003“. München: Wolters Kluwer

.

Liebscher, Marlies (Hrsg.) 2007: Endbericht des 2. Projektes „Bildungsstandards aus Mathematik für die Sekundarstufe II“. Projekt des BMUKK (Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur) März 2007.

National Curriculum for England: Homepage: www.nc.uk.net

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics): “Principles&Standards for School Mathematics”. Homepage: http://standards.nctm.org/

Neubrand, Michael (Hrsg.) 2004: „Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland“ (Deutsches PISA-2000-Konsortium). VS Verlag für Sozialwissenschaften. ISBN 3-531-14456-1

OECD (Hrsg.) 2003: The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. OECD, Paris.

Peschek, Werner; Heugl Helmut (Hrsg.), 2007: „Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe“ Version4/07. Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt. Homepage des Institutes: http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/295.htm

Schneider, Edith Hrsg.2006: „Fokus Didaktik“. Vorträge beim 16. Internationalen Kongress ÖMG/DMV an der Universität Klagenfurt. Profil Verlag München/Wien. ISBN 3-89019-598-9

Vollrath, Hans-Joachim, 2001: „Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe“ Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin. ISBN 3-8274-1169-6

Weitere Internet-Links zum Thema:

http://bildungsstandards.gibb.at/resources/bist/Plattformtext_lang.pdf

http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/index.php?id=1262 Server des BLK-Programms (Bundes-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung) mit Beispielen zu Standards

http://www.leu-bw.de/ : Landesinstitut für Schulentwicklung (Baden Württemberg): Bildungspläne: Angebote für allgemein bildende Schulen, für berufliche Teilzeit- und Vollzeitschulen

http://www.uni-klu.ac.at/idm/ : Homepage des Instituts für Didaktik der Mathematik an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

http://www.acdca.ac.at/ : Homepage von ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra)